

Topologie algébrique

Série 4

11.03.2019

L'exercice 3 est à rendre le 18.03.2019.

1. Soit $0 \rightarrow C' \xrightarrow{f} C \xrightarrow{g} C'' \rightarrow 0$ une courte suite exacte de complexes de chaînes. Montrer que

$$\ker(\partial_{n+1} : H_{n+1}C'' \rightarrow H_nC') = \text{Im}(H_{n+1}g : H_{n+1}C \rightarrow H_{n+1}C'')$$

et

$$\text{Im}(\partial_{n+1} : H_{n+1}C'' \rightarrow H_nC') = \ker(H_n f : H_nC' \rightarrow H_nC)$$

pour tout $n \geq 0$.

2. (Topologie de polytopes) Soit \mathcal{K} un complexe simplicial.
- (a) Montrer que $|\mathcal{K}|$ est de Hausdorff.
 - (b) Montrer que si \mathcal{K} est fini, alors $|\mathcal{K}|$ est compact.
 - (c) Montrer que si A un sous-espace compact de $|\mathcal{K}|$, alors il existe un sous-complexe fini \mathcal{K}' de \mathcal{K} tel que $A \subseteq |\mathcal{K}'|$.
3. (Complexes simpliciaux abstraits)

Definition 1. Un *complexe simplicial abstrait* consiste en une collection \mathcal{S} d'ensembles nonvides telle que si $\sigma \in \mathcal{S}$, alors $\tau \in \mathcal{S}$ pour tout $\emptyset \neq \tau \subset \sigma$. Un élément $\sigma \in \mathcal{S}$ est un *simplexe* de \mathcal{S} . Un simplexe σ de cardinalité $n+1$ est un *n-simplexe* de \mathcal{S} ; l'ensemble des *n-simplexes* de \mathcal{S} est noté \mathcal{S}_n . Si $\emptyset \neq \tau \subset \sigma$, alors τ est une *face* de σ . Deux complexes simpliciaux abstraits \mathcal{S} et \mathcal{S}' sont *isomorphes* s'il y a une bijection $\alpha : \mathcal{S}_0 \rightarrow \mathcal{S}'_0$ induisant des bijections $\mathcal{S}_n \rightarrow \mathcal{S}'_n$ pour tout n .

- (a) Soit \mathcal{K} un complexe simplicial géométrique. Soit $\mathcal{S}(\mathcal{K})$ la collection d'ensembles

$$\mathcal{S}(\mathcal{K}) = \left\{ \{v_0, \dots, v_n\} \mid \{\{v_0\}, \dots, \{v_n\}\} \subset \mathcal{K}_0 \text{ et } [v_0, \dots, v_n] \in \mathcal{K}_n, n \geq 0 \right\}.$$

Montrer que $\mathcal{S}(\mathcal{K})$ est un complexe simplicial abstrait.

- (b) Soit \mathcal{S} un complexe simplicial abstrait. Montrer que si \mathcal{S} est fini, il existe un complexe simplicial géométrique $\mathcal{K}_{\mathcal{S}}$ tel que \mathcal{S} soit isomorphe à $\mathcal{S}(\mathcal{K}_{\mathcal{S}})$.
- (c) Soient \mathcal{K} un complexe simplicial et W un ensemble. Soit $\rho : \mathcal{K}_0 \rightarrow W$ une application surjective, appelé un *étiquetage* des sommets de \mathcal{K} . Soit $\mathcal{S}(\rho)$ la collection d'ensembles

$$\mathcal{S}(\rho) = \{ \{ \rho(v_0), \dots, \rho(v_n) \} \mid [v_0, \dots, v_n] \in \mathcal{K}_n, n \geq 0 \}.$$

(Observer que la cardinalité de $\{ \rho(v_0), \dots, \rho(v_n) \}$ peut être inférieur à $n + 1$, car ρ n'est pas forcément injective.) Montrer que $\mathcal{S}(\rho)$ est un complexe simplicial abstrait.