TOPOLOGIE - SÉRIE 26

Exercice 1. Pour un espace topologique basé (X, x), montrer que $\pi_1(X, x)$ est abélien si et seulement si pour tout point $y \in X$ et touts chemins γ, δ de x vers y, les isomorphismes induits

$$\hat{\gamma},\ \hat{\delta} \colon \pi_1(X, x) \xrightarrow{\cong} \pi_1(X, y)$$

coïncident.

Exercice 2. (défi) Pour deux applications continues f, $g \colon X \to Y$ qui sont homotopes par une homotopie $H \colon X \times I \to Y$, montrer que le diagramme

$$\begin{tikzcd} & \pi_1(Y, fx) \arrow[d, "\widehat{H(x,-)}"] \\ \pi_1(X, x) \arrow[ur, "f_*"] \arrow[r, "g_*"'] & \pi_1(Y, gx) \end{tikzcd}$$

commute pour tout point de base $x \in X$.

Exercice 3. Un espace topologique $X \neq \varnothing$ est appelé *contractile* ssi l'identité $\mathrm{id}_X \colon X \to X$ est homotope à une application constante.

(a) Montrer qu'un espace contractile X est simplement connexe.

(b) Rappelons que $S \subseteq \mathbb{R}^n$ est appelé une *partie étoilée par rapport à* $x \in S$ ssi pour tout $y \in S$ le segment $[x, y] := \{ty + (1-t)x \mid t \in I\}$ est inclus dans S. Montrer qu'une partie étoilée (par rapport à un point) est contractile.

Exercice 4.

(a) Pour deux revêtements $p \colon E \to B$, $p' \colon E' \to B'$, montrer que l'application produit $p \times p' \colon E \times E' \to B \times B'$ est un revêtement aussi.

(b) Soit $p \colon E \to B$ un revêtement et $A \subseteq B$ un sous-espace. Montrer que $p \colon p^{-1}A \to A$ est un revêtement aussi.

Date: 14 mai 2014