TOPOLOGIE - SÉRIE 24

Exercice 1. Pour un espace topologique X et un espace métrique Y, montrer que la topologie de convergence compacte et la topologie compact ouvert sur $C(X, Y)$ sont les mêmes.

Exercice 2. Soient X, Y des espaces topologiques.

(a) Si $A \subseteq X$ est fermé, alors $C(Y, A) \subseteq C_{\mathrm{co}}(Y, X)$ est fermé aussi.

(b) Pour X de Hausdorff et $Y \neq \varnothing$, l'inclusion par applications constantes

$$\mathrm{const}\colon X \to C_{\mathrm{co}}(Y, X)$$

est un plongement fermé.

Exercice 3. Pour deux espaces topologiques X, Y, si $C(X, Y)$ est muni d'une topologie $\mathcal{T}$ telle que l'évaluation

$$\mathrm{ev}\colon C(X, Y) \times X \to Y,\ (f, x) \mapsto fx$$

est continue, montrer que la topologie compact ouvert est plus grossière que $\mathcal{T}$.

Exercice 4.

(a) Soients X, Y, Z trois ensembles. Comprendre "l'adjonction exponentielle" (i.e. montrer que c'est une bijection bien-définie)

$$Z^{X\times Y} \cong (Z^Y)^X,\ f \mapsto f^\sharp,\ g^\flat \leftarrow\!\shortmid g \quad \text{où} \quad (f^\sharp x)y := f(x, y) \quad \text{et} \quad g^\flat(x, y) := (gx)y$$

pour $f\colon X \times Y \to Z$, $g\colon X \to Z^Y$, $x \in X$, $y \in Y$, $z \in Z$.

(b) Soient X, Y, Z des espaces topologiques avec Y localement compact. Montrer que la composition

$$C_{\mathrm{co}}(Y, Z) \times C_{\mathrm{co}}(X, Y) \to C_{\mathrm{co}}(X, Z),\ (g, f) \mapsto g \circ f$$

est continue et conclure que l'évaluation $\mathrm{ev}\colon C_{\mathrm{co}}(Y, Z) \times Y \to Z$, $(g, y) \mapsto gy$ l'est aussi.

(c) Pour trois espaces topologiques X, Y, Z avec X et Y localement compact, montrer que l'adjonction exponentielle

$$C(X \times Y, Z) \cong C(X, C_{\mathrm{co}}(Y, Z))$$

du cours est en fait même un homéomorphisme

$$C_{\mathrm{co}}(X \times Y, Z) \cong C_{\mathrm{co}}(X, C_{\mathrm{co}}(Y, Z)).$$

Date: 30 avril 2014