TOPOLOGIE - SÉRIE 19

Exercice 1. Montrer qu'un espace métrique X est compact si et seulement si toute application continue $X \to \mathbb{R}$ est bornée.

Exercice 2. Le but de cet exercice est de montrer que si un espace compact de Hausdorff X s'écrit comme une réunion $X = A \cup B$ avec A, $B \subseteq X$ fermé et métrisable, alors X est aussi métrisable.

(a) Montrer que X est métrisable si et seulement s'il admet une base dénombrable.

(b) Traiter le cas où $A \cap B = \varnothing$.

(c) Traiter le cas où $A \cap B \neq \varnothing$.

Définition. Un espace topologique X est *localement compact* ssi pour chaque point $x \in X$ et chaque voisinage ouvert U de x, il existe un compact $K \subseteq X$ tel que $x \in \mathring{K} \subseteq K \subseteq U$. C'est à dire, les voisinages compacts engendre le filtre $\mathcal{N}(x)$.

Exercice 3. Montrer qu'un espace localement compact de Hausdorff est

(a) régulier.

(b) complètement régulier.
Indication: Utiliser le lemme de recollement.

Exercice 4. Pour un espace compact de Hausdorff X on dénote $C(X, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues $X \to \mathbb{R}$, qui possède naturellement la structure d'un anneau en sommant et multipliant les fonctions valeur par valeur:

$$(f+g)x := fx + gx, \qquad (fg)x := (fx)(gx)$$

pour f, $g \in C(X, \mathbb{R})$, $x \in X$. Soit $X' := \operatorname{Max} C(X, \mathbb{R})$ l'ensemble des idéaux maximaux de $C(X, \mathbb{R})$ et pour $f \in C(X, \mathbb{R})$

$$U_f := \{x \in X \mid fx \neq 0\}, \qquad U'_f := \{\mathfrak{m} \in X' \mid f \notin \mathfrak{m}\}.$$

On va montrer que l'on peut reconstruire X de $C(X, \mathbb{R})$ en montrant que

(a) les U_f forment une base pour la topologie de X et les U'_f forment une base de topologie sur X' (et on regarde X' comme un espace topologique muni de cette topologie);

(b) l'application

$$\varphi\colon X \to X',\ x \mapsto \mathfrak{m}_x := \{f \in C(X, \mathbb{R}) \mid fx = 0\}$$

est bien-défini (i.e. $\mathfrak{m}_x$ est un idéal maximal) et continue;
Indication: Considérer $\operatorname{ev}_x\colon C(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.

(c) l'application φ est bijectif.
Indication: Pour la surjectivité, montrer que pour $\mathfrak{m} \in X'$

$$V(\mathfrak{m}) := \{x \in X \mid fx = 0 \text{ pour toutes } f \in \mathfrak{m}\} \neq \varnothing.$$

(d) l'application φ est ouverte.

Date: 18 mars 2014