TOPOLOGIE - SÉRIE 14

Exercice 1. Pour une chaîne $X_0 \hookrightarrow X_1 \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow X_n \hookrightarrow \ldots$ de plongements, sa *colimite* est l'espace topologique X dont son ensemble sous-jacent est $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ et $U \subseteq X$ est ouvert si et seulement si tout $U \cap X_n \subseteq X_n$ est ouvert. Montrer que

(a) ça définit une topologie sur $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$;

(b) $A \subseteq X$ est fermé si et seulement si tout $A \cap X_n \subseteq X_n$ est fermé;

(c) si chaque $X_n \hookrightarrow X_{n+1}$ est un plongement fermé/ouvert alors chaque inclusion $i_n\colon X_n \hookrightarrow X$ est un plongement fermé/ouvert;

(d) si chaque X_n est T_1 et $(K, \mathcal{T})$ est un espace compact, toute application continue $f\colon K \to X$ factorise par un i_n.
Indication: Trouver $Y = \{x_0, x_1, \ldots\} \subseteq f(K)$ *avec* $x_n \notin X_n$ *(pas forcément deux à deux distinct) et montrer que chaque* $A \subseteq Y$ *est fermé dans* X.

Exercice 2. (Heine-Borel) Montrer pour $K \subseteq \mathbb{R}^n$ que $\big(K, (\mathcal{T}_{\mathrm{st}})_K\big)$ est compact si et seulement si $K \subseteq \mathbb{R}^n$ est fermé et borné.
Indication: Utiliser qu'un intervalle fermé ainsi qu'un produit fini de compacts est compact.

Exercice 3. Pour un espace topologique $(X, \mathcal{T})$, les énoncés suivants sont équivalents:

(a) $(X, \mathcal{T})$ est compact;

(b) tout filtre sur X a un point d'accumulation;

(c) tout ultrafiltre sur X converge.

Indication: Utiliser la PIF.

Exercice 4. Montrer qu'un espace $(X, \mathcal{T})$ est compact si et seulement si l'application unique vers un point $X \to *$ est propre (cf. série 13, exercice 1).
Indication: On a, pour tout filtre $\mathcal{F}$ *sur* X*, un espace topologique* $Y := X + \{*\}$ *dont les ouverts non-vides sont les* $F + \{*\}$ *avec* $F \in \mathcal{F}$*. Après, considérer la projection de l'adhérence de la "diagonale"* $D := \{(x, x) \mid x \in X\} \subseteq X \times Y$.

Date: 20 décembre 2013