TOPOLOGIE - SÉRIE 11

Exercice 1. Montrer que

(a) si $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique et $(Y_i, \mathcal{T}_{Y_i})_{i \in I}$ une famille de sous-espaces connexes par arcs de X tels que pour tout i, $j \in I$ il y a $k \in I$ avec $Y_i \cap Y_k$, $Y_j \cap Y_k \neq \varnothing$ (e.g. si $\bigcap_{i \in I} Y_i \neq \varnothing$) alors $\bigcup_{i \in I} Y_i$ est connexe par arcs;

(b) si $(X, \mathcal{T})$ est connexe par arcs et $f \colon (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ est continue, alors $\big(f(X), \mathcal{T}'_{f(X)}\big)$ est connexe par arcs;

(c) si $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$ est une famille d'espaces topologiques connexes par arcs, alors leur produit $(\prod_{i \in I} X_i, \ast_{i \in I} \mathcal{T}_i)$ est connexe par arcs.

Exercice 2. Les espaces suivants, sont-ils connexes par arcs?

(a) $D^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leqslant 1\}$

(b) $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$

(c) $(I^2, \mathcal{T}_<)$ où $<$ est l'ordre lexicographique sur $I^2 = [0, 1]^2$
Indication: Pour un chemin dans I^2, considérer les préimages des segments verticaux $\{x\} \times]0, 1[$ et utiliser le théorème de la valeur intermédiaire, ainsi que le fait que $\mathbb{Q} \cap I$ est dénombrable.

Exercice 3. Montrer que SO_n (avec la topologie sous-espace de $(\mathbb{R}^{n^2}, \mathcal{T}_{\mathrm{st}})$) est connexe par arcs.
Indication: Chaque matrice dans SO_n est conjugée à une matrice par blocs diagonales où chaque bloc est de la forme

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \qquad \text{ou} \qquad [1].$$

Exercice 4. Montrer que

(a) $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_{\mathrm{cof}})$ (où $\mathcal{T}_{\mathrm{cof}}$ est la topologie cofinie) est connexe;

(b) si X est un ensemble avec $|X| \geqslant 2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}|$, alors $(X, \mathcal{T}_{\mathrm{cof}})$ est connexe par arcs.
Indication: Considérer d'abord le cas $X = \mathbb{R}$ et pour le cas général, utiliser qu'un sous-espace de $(X, \mathcal{T}_{\mathrm{cof}})$ est aussi muni de la topologie cofinie.

Date: 20 décembre 2013