TOPOLOGIE - SÉRIE 10

Exercice 1. Soit X un ensemble totalement ordonné. Montrer que si une application non décroissante $f\colon (X, \mathcal{T}_<) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{st}})$ a la propriété de la valeur intermédiaire (i.e. si x, $x' \in X$ et $y \in Y$ avec $f(x) \leqslant y \leqslant f(x')$ il existe $x'' \in X$ tel que $f(x'') = y$), elle est continue.

Exercice 2.

(a) Démontrer que pour toute application continue $f\colon \left(S^1, (\mathcal{T}_{\text{st}})_{S^1}\right) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{st}})$, il existe $x \in S^1$ tel que $f(x) = f(-x)$.

(b) Soit $f\colon \left([0,1], (\mathcal{T}_{\text{st}})_{[0,1]}\right) \to \left([0,1], (\mathcal{T}_{\text{st}})_{[0,1]}\right)$ une application continue.
- Considérer l'application graphe $F\colon \left([0,1], (\mathcal{T}_{\text{st}})_{[0,1]}\right) \to (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{\text{st}})$, $x \mapsto \left(x, f(x)\right)$. Que peut-on dire sur sa continuité?
- Montrer qu'il existe un $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = x$.

Exercice 3. Dans cet exercice, on va déterminer la connexité de $\mathbb{R}^\omega$ par rapport aux plusieurs topologies différentes.

(a) Montrer que $\mathbb{R}^\omega$ est connexe par rapport à la topologie produit.
Indication: $\mathbb{R}^0 \subset \mathbb{R}^1 \subset \mathbb{R}^2 \subset \ldots \subset \mathbb{R}^\infty := \bigcup_{n=1}^\infty \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^\omega$.

(b) Déterminer si $\mathbb{R}^\omega$ est connexe dans la topologie uniforme ou pas.
Indication: Considérer $\{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid x \text{ bornée}\} \subseteq \mathbb{R}^\omega$.

(c) Et par rapport à la topologie boîte?

Exercice 4. (Courbe sinus du topologue) Montrer que la courbe sinus du topologue

$$T := \left\{ (x, \sin(1/x)) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \in \,]0,1] \right\} \cup \{(0,0)\}$$

aussi bien que la courbe sinus fermée du topologue

$$\overline{T} := \left\{ (x, \sin(1/x)) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \in \,]0,1] \right\} \cup \left(\{0\} \times [-1,1]\right)$$

est un sous-espace connexe de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{\text{st}})$.

Date: 22 novembre 2013