TOPOLOGIE - SÉRIE 8

Exercice 1. Soit $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques. Montrer que

(a) si les X_i sont de Hausdorff, alors leur produit $(\prod_{i\in I} X_i, *_{i\in I}\mathcal{T}_i)$ est aussi de Hausdorff;

(b) $\overline{\prod_{i\in I} M_i} = \prod_{i\in I} \overline{M_i}$ pour toute famille $(M_i)_{i\in I}$ de sous-ensembles $M_i \subseteq X_i$;

(c) $*_{i\in I}(\mathcal{T}_i)_{Y_i} = (*_{i\in I}\mathcal{T}_i)_{\prod_{i\in I} Y_i}$ pour toute famille $(Y_i)_{i\in I}$ de sous-espaces $Y_i \subseteq X_i$.

Exercice 2. Pour une famille dénombrable $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ d'espaces topologiques métrisables, montrer que leur produit $(\prod_{i\in I} X_i, *_{i\in I}\mathcal{T}_i)$ est de nouveau métrisable. Trouver un exemple de famille indénombrable, dont le produit n'est plus métrisable.
Indication: Considérer les bases locales d'un point où on appelle base locale d'un point x une base pour le filtre $\mathcal{V}(x)$ des voisinages de x.

Exercice 3.

(a) Montrer que $\mathbb{R}^\omega$ avec la topologie boite (et où $\mathbb{R}$ est muni de la topologie standard) n'est pas métrisable.
Indication: De nouveau, considérer les bases locales.

(b) Trouver un exemple d'une famille $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ d'espaces topologiques et d'une application $f\colon (Y,\mathcal{T}) \to (\prod_{i\in I} X_i, \mathcal{T}_{\text{box}})$ tels que chaque composante $f_i\colon (Y,\mathcal{T}) \to (X_i, \mathcal{T}_i)$ est continue mais f ne l'est pas.

Exercice 4.

(a) Pour une application $f\colon X \to Y$ et un ultrafiltre $\mathcal{F}$ sur X, montrer que $f_*\mathcal{F}$ est un ultrafiltre sur Y.

Soit $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques dont le produit $X := \prod_{i\in I} X_i$ est non-vide, $\mathcal{F}$ un filtre sur $(X, *_{i\in I}\mathcal{T}_i)$ et notons $\mathcal{F}_i := (\mathrm{pr}_i)_*\mathcal{F}$ les images directes de $\mathcal{F}$ par les projections $\mathrm{pr}_i\colon X \to X_i$. Pour chaque point $x = (x_i)_{i\in I} \in X$, montrer que

(b) pour $f\colon Y \twoheadrightarrow Z$ une application surjective et $\mathcal{G}$ un filtre sur Y

$$f_*\mathcal{G} = \{fA \mid A \in \mathcal{G}\}$$

(en particulier $\mathcal{F}_i = \{\mathrm{pr}_i A \mid A \in \mathcal{F}\}$);

(c) $\mathcal{F}$ converge vers x si et seulement si chaque $\mathcal{F}_i$ avec $i \in I$ converge vers x_i.

(d) Trouver un exemple concret de X et une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui n'a pas de point d'accumulation mais où chaque $(\mathrm{pr}_i\, x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $i \in I$ en possède un.

Date: 7 novembre 2013