TOPOLOGIE - SÉRIE 5

Définition. Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est dit T_1 ssi tous les singletons $\{x\} \subseteq X$ sont fermés.

Exercice 1. Montrer qu'un espace fini et T_1 est discret et que tout espace de Hausdorff est T_1.

Exercice 2. Considérer les cinq topologies sur $\mathbb{R}$ de la semaine passée.

(a) Pour chacune des topologies, déterminer l'adhérence de $K := \{1/n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$.

(b) Lesquelles de ces topologies satisfont-elles l'axiome de Hausdorff? Et l'axiome T_1?

Exercice 3. Pour un espace topologique métrisable $(X, \mathcal{T})$ et $M \subseteq X$ montrer que $x \in \overline{M}$ si et seulement si on y trouve une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in M^{\mathbb{N}}$ qui converge vers x (dans X).
Indication: La direction "$\Leftarrow$" est juste dans un espace topologique quelconque (pas forcément métrisable).

Définition. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Un $x \in X$ est appelé *point d'accumulation* d'un filtre propre $\mathcal{F}$ sur X ssi pour tout voisinage ouvert U de x et tout $A \in \mathcal{F}$ on a $U \cap A \neq \varnothing$. Il est un *point limite* ssi $U \in \mathcal{F}$ pour tout voisinage ouvert de x. Dans ce cas on dit que $\mathcal{F}$ *converge* vers x et écrit $\mathcal{F} \to x$. Plus généralement, si $\mathcal{F}$ est un filtre sur un sous-ensemble $M \subseteq X$, un $x \in X$ est un *point d'accumulation* resp. *point limite* s'il l'est pour $\mathcal{F}_X(\mathcal{F})$.

Exercice 4. Pour un espace topologique $(X, \mathcal{T})$, montrer que

(a) tout point limite d'un filtre est aussi un point d'accumulation;

(b) pour un ultrafiltre, la réciproque est aussi juste;

(c) X est de Hausdorff si et seulement si tout filtre converge au plus vers un point;

(d) pour tout sous-ensemble $M \subseteq X$ et $x \in X$ on a $x \in \overline{M}$ si et seulement s'il existe un filtre $\mathcal{F}$ sur M avec $\mathcal{F} \to x$ (dans X).

Date: 17 octobre 2013