TOPOLOGIE - SÉRIE 2

Exercice 1. Pour un espace topologique X et $M \subseteq X$, montrer que M est ouvert si et seulement si pour tout $x \in M$ il existe un ouvert $U \subseteq X$ tel que $x \in U \subseteq M$.

Exercice 2. On définit une topologie sur $\mathbb{Z}$ (appelé la *topologie des entiers uniformément espacés*) comme suit:

$$U \subseteq \mathbb{Z} \text{ est ouvert } :\Leftrightarrow \quad U \text{ est une réunion d'ensembles de la forme } a\mathbb{Z} + b$$

(où a, $b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$ et où $a\mathbb{Z} + b = \{ax + b \mid x \in \mathbb{Z}\}$). Montrer que

(a) c'est vraiment une topologie sur $\mathbb{Z}$;

(b) les $a\mathbb{Z} + b$ avec a, $b \in \mathbb{Z}$ sont fermés (i.e. leurs compléments sont ouverts) et ouverts (*clopen* en anglais);

(c) $\mathbb{Z} \setminus \{\pm 1\} = \bigcup_{p \text{ prime}} (p\mathbb{Z} + 0)$ et donc, en notant qu'un ensemble non vide et fini $U \subseteq \mathbb{Z}$ n'est pas ouvert, qu'il y a une infinité des nombres premiers.

Exercice 3. Vrais ou faux?

(a) Un espace topologique est discret (i.e. chaque $U \subseteq X$ est ouvert) si et seulement si chaque singleton $\{x\} \subseteq X$ est ouvert.

(b) Pour un espace topologique fini X, si tout singleton $\{x\} \subseteq X$ est fermé (i.e. $X \setminus \{x\} \subseteq X$ est ouvert) alors la topologie sur X est la topologie discrète (i.e. tout $U \subseteq X$ est ouvert).

(c) Et pour X dénombrable?

Pour un ensemble X, notons $\mathrm{UFlt}(X)$ l'ensemble des ultrafiltres sur X.

Exercice 4. Pour un ensemble X, un $S \subseteq \mathrm{UFlt}(X)$ est appelé *fermé* ssi $S = \varnothing$ ou

$$\bigcap_{\mathcal{F} \in S} \mathcal{F} \subseteq \mathcal{U} \qquad \text{implique} \qquad \mathcal{U} \in S \qquad \text{pour tout ultrafiltre } \mathcal{U} \text{ sur } X.$$

En prenant comme ouverts les compléments des fermés, montrer que ça définit une topologie sur $\mathrm{UFlt}(X)$ (que l'on appelle la *topologie de Zariski*).

Date: 2 octobre 2013