TOPOLOGIE - SÉRIE 1

Exercice 1. Soit $f\colon A \to B$ une application. Prouver que

(a) $A' \subseteq f^{-1}fA'$ pour tout $A' \subseteq A$, avec égalité si f est injective;

(b) $ff^{-1}B' \subseteq B'$ pour tout $B' \subseteq B$, avec égalité si f est surjective;

Exercice 2. Pour une application $f\colon A \to B$ montrer que

(a) l'opération préimage f^{-1} préserve les inclusions, les réunions, les intersections et les compléments; i.e. pour tous B', $B'' \subseteq B$ et toute famille $(B_i)_{i\in I}$ avec $B_i \subseteq B$

$$B' \subseteq B'' \;\Rightarrow\; f^{-1}B' \subseteq f^{-1}B'', \quad f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}B_i,$$

$$f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}B_i \quad \text{et} \quad f^{-1}(B \setminus B') = A \setminus f^{-1}B';$$

(b) l'opération image directe par f préserve (seulement) les inclusions et les réunions, i.e. pour tous A', $A'' \subseteq A$ et toute famille $(A_i)_{i\in I}$ avec $A_i \subseteq A$

$$A' \subseteq A'' \;\Rightarrow\; f(A') \subseteq f(A'') \quad \text{et} \quad f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i).$$

Définition. En notant $\mathfrak{P}X$ pour l'ensemble des parties d'un ensemble X, un *filtre* sur X est un ensemble $\mathcal{F} \subseteq \mathfrak{P}X$ non-vide tel que

(a) si A, $B \in \mathcal{F}$, alors $A \cap B \in \mathcal{F}$ (i.e. $\mathcal{F}$ est fermé sous intersections finies);

(b) si $A \in \mathcal{F}$ et $A \subseteq B \subseteq X$ alors $B \in \mathcal{F}$. (i.e. $\mathcal{F}$ est fermé sous extensions)

En particulier, on a $X \in \mathcal{F}$. Un tel filtre $\mathcal{F}$ est dit *propre* si et seulement si de plus

(c) $\mathcal{F} \neq \mathfrak{P}X$ ou de manière équivalente $\varnothing \notin \mathcal{F}$.

Notons $\mathrm{Flt}(X)$ pour l'ensemble des filtres sur X, qui est partiellement ordonné par inclusion. Parce que le filtre non propre $\mathcal{F} = \mathfrak{P}X$ n'est pas très intéressant, tous les filtres sont supposés propres sauf si dit autrement. Finalement, un filtre propre $\mathcal{F}$ est appelé *ultrafiltre* si et seulement si pour tous A, $B \subseteq X$

(d) $A \cup B \in \mathcal{F}$ implique $A \in \mathcal{F}$ ou $B \in \mathcal{F}$.

Exercice 3. Pour $x \in X$, montrer que l'ensemble $\mathcal{U}_x := \Uparrow\{x\} := \{A \subseteq X \mid x \in A\}$ est un ultrafiltre, appelé *l'ultrafiltre principal* engendré par x.

Exercice 4. Soit X un ensemble arbitraire. Montrer que

(a) l'intersection $\mathcal{F} = \bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_i$ d'une famille des filtres $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ est aussi un filtre;

(b) pour $S \subseteq \mathfrak{P}X$ un ensemble de parties, l'ensemble

$$\mathcal{F}_X S := \{M \subseteq X \mid \exists n \in \mathbb{N},\, A_1, \ldots, A_n \in S\colon A_1 \cap \ldots \cap A_n \subseteq M\}$$

est le plus petit filtre (peut être non propre) qui contient S; i.e. $\mathcal{F}_X S$ est *engendré* par S;

(c) si l'ensemble S de (b) satisfait $\varnothing \notin S$ et pour chaque A, $B \in S$, il y a $C \in S$ tel que $C \subseteq A \cap B$ (on dit que S est une *base* de filtre), alors $\mathcal{F}_X S$ est propre.

Une propriété importante des ultrafiltres (que l'on va montrer plus tard dans le cours):

Théorème de l'Ultrafiltre. Tout filtre peut être étendu en un ultrafiltre.

Date: 4 octobre 2013