**Enoncé.** Soit $j : A \hookrightarrow X$ l'inclusion, avec $A$ fermé dans $X$.

a) Montrer que si $j : A \hookrightarrow X$ est une cofibration, alors

$$j \times Id_Z : A \times Z \to X \times Z$$

est également une cofibration pour tout espace $Z$.

b) Montrer que si $j : A \hookrightarrow X$ est une cofibration, alors pour toute application $f : A \to Y$, l'inclusion induite

$$Y \hookrightarrow Y \cup_f X = Y \coprod X/\sim$$

où $a \sim f(a)$ pour tout $a \in A$, est également une cofibration, i.e., les cofibrations sont préservées sous pushout. En particulier, pour toute application $f : X \to Y$, l'inclusion $i_f : Y \hookrightarrow C_f$ est une cofibration.

**Preuve.** Rappelons d'abord la caractérisation des cofibrations.

Soit $A$ un sous-espace fermé de $X$, alors

$$\begin{gathered}\text{l'inclusion } j : A \hookrightarrow X \text{ est une cofibration}\\ \Longleftrightarrow\\ \text{il existe une rétraction } r : X \times I \to X \times \{0\} \cup A \times I, \text{ i.e.,}\\ X \times \{0\} \cup A \times I \hookrightarrow X \times I \xrightarrow{r} X \times \{0\} \cup A \times I\\ \text{revient à appliquer l'identité sur } X \times \{0\} \cup A \times I.\end{gathered}$$

Dans les deux parties de l'exercice, on a $j : A \hookrightarrow X$ une cofibration, donc par la caractérisation, il existe $r_j$ tel que

$$r_j \circ incl._j = Id_{X\times\{0\}\cup A\times I}, \tag{1}$$

i.e., tel que le diagramme suivante commute.

$$\begin{tikzcd} X \times \{0\} \cup A \times I \arrow[rr, "Id"] \arrow[d, hook, "incl._j"'] & & X \times \{0\} \cup A \times I \\ X \times I \arrow[urr, "r_j"] & & \end{tikzcd}$$

De plus, nous utiliserons souvent le fait suivant.

Soit $(a, t) \in A \times I$, alors

$$incl._j(a, t) = (a, t) \tag{2}$$

et soit $(x, 0) \in X \times \{0\}$, alors

$$incl._j(x, 0) = (x, 0) \tag{3}$$

Finalement, pour des questions de notations, nous utiliserons souvent l'existence d'homéomorphismes tels que :

$$(X \times Z) \times \{0\} \cup (A \times Z) \times I \cong X \times \{0\} \times Z \cup A \times I \times Z, \tag{4}$$

et

$$(X \times Z) \times I \cong X \times I \times Z. \tag{5}$$

a) Soit $Z$ un espace, nous devons montrer que $j \times Id_Z : A \times Z \to X \times Z$ est une cofibration. Comme $A \subseteq X$ fermé, on a évidemment que $A \times I \subseteq X \times I$ est fermé (il suffit d'utiliser la projection qui est une application continue et le fait que la préimage d'un fermé est un fermé). L'application $j \times Id_Z$ est clairement une injection, donc on va utiliser la caractérisation. Pour cela et en s'aidant de (4) et (5), on doit trouver $r$ tel que le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd}
X \times \{0\} \times Z \cup A \times I \times Z \arrow[r, "Id"] \arrow[d, hook, "incl."'] & X \times \{0\} \times Z \cup A \times I \times Z \\
X \times I \times Z \arrow[ur, "r"] &
\end{tikzcd}$$

Posons $r = r_j \times Id_Z$ et montrons que le diagramme commute.
Soit $(a, t, z) \in A \times I \times Z$, on a

$$\begin{aligned}
r \circ incl.(a, t, z) &= r(a, t, z) \\
&= r_j(a, t) \times Id_Z(z) \\
&\overset{(2)}{=} r_j(incl._j(a, t)) \times Id_Z(z) \\
&\overset{(1)}{=} Id_{X \times \{0\} \cup A \times I}(a, t) \times Id_Z(z) \\
&= (a, t, z)
\end{aligned}$$

Soit maintenant $(x, 0, z) \in X \times \{0\} \times Z$, on a

$$\begin{aligned}
r \circ incl.(x, 0, z) &= r(x, 0, z) \\
&= r_j(x, 0) \times Id_Z(z) \\
&\overset{(3)}{=} r_j(incl._j(x, 0)) \times Id_Z(z) \\
&\overset{(1)}{=} Id_{X \times \{0\} \cup A \times I}(x, 0) \times Id_Z(z) \\
&= (x, 0, z)
\end{aligned}$$

Donc $r \circ incl.$ est bien défini et on a bien $r \circ incl. = Id_{X \times \{0\} \times Z \cup A \times I \times Z}$.
Donc $r$ est une rétraction et ainsi, par la caractérisation des cofibrations, $j \times Id_Z : A \times Z \to X \times Z$ est une cofibration.

b) Nous allons utiliser, encore une fois, la caractérisation des cofibrations. Tout d'abord, $Y \subseteq Y \cup_f X$ est bien fermé (il suffit d'appliquer un plongement suivi d'une application quotient, qui sont bien continues, puis de prendre les préimages). Ainsi, l'inclusion $Y \hookrightarrow Y \cup_f X = Y \coprod X / \sim$ sera une cofibration si nous trouvons une rétraction $r$ tel que le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd}
Y \cup_f X \times \{0\} \cup Y \times I \arrow[r, "Id"] \arrow[d, hook, "incl."'] & Y \cup_f X \times \{0\} \cup Y \times I \\
Y \cup_f X \times I \arrow[ur, "r"] &
\end{tikzcd}$$

Par le cours, on sait qu'on a le pushout.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, hook, "j"'] \arrow[d, "f"] & X \arrow[d, "\overline{f}"] \\
Y \arrow[r, "\overline{j}"] & Y \cup_f X
\end{tikzcd}$$

De plus par la page 38 de [1] et le fait que $I$ est localement compact et de Hausdorff, ce pushout induit le pushout suivant de $j \times Id_I$ et $f \times Id_I$.

$$\begin{tikzcd}
A \times I \arrow[r, hook, "j \times Id_I"'] \arrow[d, "f \times Id_I"'] & X \times I \arrow[d, "\overline{f} \times Id_I"] \\
Y \times I \arrow[r, "\overline{j} \times Id_I"] & Y \cup_f X \times I
\end{tikzcd}$$

Nous allons utiliser la propriété universelle de ce pushout sur le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd}
A \times I \arrow[r, hook, "j \times Id_I"'] \arrow[dd, "f \times Id_I"'] & X \times I \arrow[d, "r_j"] \\
 & X \times \{0\} \cup A \times I \arrow[d, "\overline{f} \times Id_{\{0\}} + f \times Id_I"] \\
Y \times I \arrow[r, "Id_{Y \times I}"] & Y \cup_f X \times \{0\} \cup Y \times I
\end{tikzcd}$$

où $\overline{f} \times Id_{\{0\}} : X \times \{0\} \to Y \cup_f X \times \{0\}$ et $f \times Id_I : A \times I \to Y \times I$.

Commençons par montrer que ce diagramme commute bien. Cela nous permettra d'utiliser la propriété universelle du pushout.
Soit $(a, t) \in A \times I$, on a

$$\begin{aligned}
(Id_{Y \times I}) \circ (f \times Id_I)(a, t) &= Id_{Y \times I}(f(a), t) \\
&= (f(a), t),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
(\overline{f} \times Id_{\{0\}} + f \times Id_I) \circ r_j \circ (j \times Id_I)(a,t) \\
&= (\overline{f} \times Id_{\{0\}} + f \times Id_I) \circ r_j(a,t) \\
&\overset{(2)}{=} (\overline{f} \times Id_{\{0\}} + f \times Id_I) \circ r_j \circ incl._j(a,t) \\
&\overset{(1)}{=} (\overline{f} \times Id_{\{0\}} + f \times Id_I) \circ Id_{X\times\{0\}\cup A\times I}(a,t) \\
&= (\overline{f} \times Id_{\{0\}} + f \times Id_I)(a,t) \\
&= (f(a),t) \qquad \text{car } (a,t) \in A \times I.
\end{aligned}$$

Donc notre diagramme commute et on peut utiliser la propriété universelle qui nous donne l'existence de $r$ tel que $r \circ (\overline{j} \times Id_I) = Id_{Y\times I}$. I.e., tel que le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd}
Y \cup_f X \times \{0\} \cup Y \times I \arrow[r, "Id"] \arrow[d, hook, "incl."'] & Y \cup_f X \times \{0\} \cup Y \times I \\
Y \cup_f X \times I \arrow[ur, "r"] &
\end{tikzcd}$$

Ainsi $r$ est la rétraction que nous recherchions et donc $\overline{j} : Y \hookrightarrow Y \cup_f X$ est bien une cofibration.

Pour montrer la cas particulier, il suffit de prendre l'injection

$$\begin{aligned}
j = \eta_X : X &\to CX, \\
x &\mapsto [x,0],
\end{aligned}$$

alors

$$Y \hookrightarrow Y \cup_f CX = Y \coprod CX/\sim\, = C_f$$

est une cofibration, i.e., l'injection de $Y$ dans le mapping cone sur $f$ est une cofibration.

# Références

[1] Renzo A. Piccinini : *Lectures on Homotopy Theory.* Mathematical Studies 171. North-Holland, 1992.