Exercice 1, Série 8

Hadrien Espic

20 novembre 2013

On notera $e : PY \to Y$ l'application envoyant λ sur $\lambda(1)$.

1. Soit $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ une application continue pointée. Supposons d'abord qu'il existe $\hat{f} : X \to PY$ continue pointée telle que le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\hat{f}"'] & & Y \\ & PY \arrow[ur, "e"'] & \end{tikzcd}$$

On pose

$$\begin{array}{rccc} H : & X \times I & \longrightarrow & Y \\ & (x,t) & \longmapsto & \hat{f}(x)(t). \end{array}$$

Remarquons que $H = \mathrm{ev}_{I,Y} \circ (\hat{f} \times \mathrm{id}_I)$. Puisque l'évaluation $\mathrm{ev}_{I,Y} : \mathrm{Map}(I, Y) \times I \to Y$ est continue (car I est localement compact), H est continue comme composition d'applications continues. De plus, pour tout $x \in X$, on a $H(x, 0) = \hat{f}(x)(0) = y_0$ car $\hat{f}(x) \in PY$, et par hypothèse $H(x, 1) = \hat{f}(x)(1) = (e \circ \hat{f})(x) = f(x)$. On voit également que, puisque $\hat{f}$ est basée,

$$\forall t \in I, H(x_0, t) = \hat{f}(x_0)(t) = c_{y_0}(t) = y_0.$$

Par conséquent, H est une homotopie basée de $x \mapsto y_0$ vers f.

Supposons maintenant qu'il existe une homotopie basée $G : X \times I \to Y$ de $x \mapsto y_0$ à f. Alors on définit $\hat{f} : X \to PY$ par $\hat{f}(x) = G(x, -)$. Cette application est bien définie car pour tout $x \in X$, on a $G(x, 0) = y_0$ et $G(x, -)$ continue comme restriction de G. De plus elle est basée car G est une homotopie basée. Pour justifier la continuité de cette application, on va utiliser la correspondance exponentielle (*c.f.* exercice 4 série 22 de Topologie II). On rappelle que l'application ensembliste

$$\begin{array}{rccc} \theta : & (Z^Y)^X & \longrightarrow & Z^{X \times Y} \\ & \varphi & \longmapsto & ((x,y) \mapsto \varphi(x)(y)) \end{array}$$

est une bijection, qui en induit une autre

$$\theta' = \theta|_{C(X,\mathrm{Map}(Y,Z))} : C(X, \mathrm{Map}(Y, Z)) \longrightarrow C(X \times Y, Z).$$

Pour prouver que $\hat{f}$ est continue il suffit de prouver que $\theta(\hat{f})$ l'est (en effet $\theta(\hat{f})$ continue implique $(\theta')^{-1}(\theta(\hat{f})) = \hat{f}$ continue). Or pour tout $(x,t) \in X \times I$ on voit que $\theta(\hat{f})(x,t) = \hat{f}(x)(t) = G(x,t)$ et donc $\theta(\hat{f}) = G$, qui est continue par hypothèse. Ainsi $\hat{f}$ est continue. On voit de plus que $e \circ \hat{f} = \hat{f}(-)(1) = G(-,1) = f$, comme souhaité.

2. Soient $(W, w_0) \xrightarrow{g} (X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0)$ dans $\mathbf{Top}_*$. Supposons d'abord qu'il existe une application pointée $\hat{g} : (W, w_0) \to (P_f, (x_0, c_{y_0}))$ telle que le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd} W \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "\hat{g}"'] & & X \\ & P_f \arrow[ur, "q_f"'] & \end{tikzcd}$$

On peut écrire $\hat{g} = (h, k)$ où $h : W \to X$ et $k : W \to PY$ sont des applications continues pointées vérifiant $k(w)(1) = (f \circ h)(w)$, $\forall w \in W$ (il suffit de prendre $h = \pi_X \circ g$ et $k = \pi_{PY} \circ g$). Remarquons que par hypothèse, pour tout $w \in W$, on a $g(w) = q_f(\hat{g}(w)) = q_f(h(w), k(w)) = h(w)$ et donc $h = g$. Posons

$$\begin{array}{rccl} H : & W \times I & \longrightarrow & Y \\ & (w,t) & \longmapsto & k(w)(t). \end{array}$$

On voit que $H = \mathrm{ev}_{I,Y} \circ (k \times \mathrm{id}_I)$ et donc H est continue (encore une fois car I est localement compact). De plus, pour tout $w \in W$, on a $H(w,0) = k(w)(0) = y_0$ par définition de PY, et $H(w,1) = k(w)(1) = (f \circ h)(w) = (f \circ g)(w)$, donc H est une homotopie de $w \mapsto y_0$ vers $f \circ g$. On vérifie facilement qu'elle est aussi basée : pour tout $t \in I$, $H(w_0, t) = k(w_0)(t) = c_{y_0}(t) = y_0$.

Supposons maintenant qu'il existe une homotopie basée $G : W \times I \to Y$ de $w \mapsto y_0$ vers $f \circ g$. On définit

$$\begin{array}{rccl} \hat{g} : & (W, w_0) & \longrightarrow & (P_f, (x_0, c_{y_0})) \\ & w & \longmapsto & (g(w), G(w,-)). \end{array}$$

Remarquons d'abord que pour tout $w \in W$, $G(w,0) = y_0$ et $G(w,-)$ est continue comme restriction de G, donc $G(w,-) \in PY$. De plus $G(w,1) = f(g(w))$, par conséquent $(g(w), G(w,-)) \in P_f$ et $\hat{g}$ est bien définie, et on voit facilement que $\hat{g}$ est basée car g et G le sont. L'argument développé dans le point 1 permet de dire que $w \mapsto G(w,-)$, et donc $\hat{g}$, est une application continue. D'autre part, on a aussi $q_f \circ \hat{g} = g$, comme souhaité.