Homotopie & Homologie - Série 4 - Exercice 1

Florent Singy

November 13, 2013

1. Soit G un groupe abélien.

a) Calculer $H_*(S^1 \vee S^1; G)$. Ici, $S^1 \vee S^1 = S^1 \coprod S^1 / \sim$, où la relation d'équivalence identifie (colle ensemble) les points de bases de deux copies de S^1.

b) Calculer $H_1(S^1 \times S^1; G)$

Proof. a) **Commençons par trouver une triade excissive pour $X := S^1 \vee S^1$.**

Soient $z_0 \in S^1$ le point de base pour définir la relation d'équivalence de la donnée, et $x \in S^1$ un point distinct de z_0. Posons

$$A = (S^1 - \{x\}) \vee S^1,\ B = S^1 \vee (S^1 - \{x\}).$$

Alors le triplet $(X; A, B)$ forme une triade excessive.

Nous avons calculé en cours les groupes d'homologie ordinaire de la sphère S^1, qui sont donnés par

$$H_n(S^1, \varnothing) = \begin{cases} G & : \text{si } n = 0, 1 \\ \{0\} & : \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

De plus l'axiome [H5] nous indique que

$$H_n(\{*\}, \varnothing) = \begin{cases} G & : \text{si } n = 0 \\ \{0\} & : \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

Nous avons une équivalence d'homotopie entre A, respectivement B, et S^1. En effet, il suffit de considérer la déformation qui contracte la partie $S^1 - \{x\}$ de l'union disjointe en le point de base z_0. C'est bien une homotopie puisque x et z_0 sont distincts. Par un argument similaire, nous trouvons que $A \cap B \simeq \{*\}$.

Les foncteurs H_n étant des invariants homotopiques, nous avons les isomorphismes de groupes suivants, $\forall n \in \mathbb{N}$: $H_n(A \cap B, \varnothing) \cong H_n(\{*\}, \varnothing)$, $H_n(A, \varnothing) \cong H_n(B, \varnothing) \cong H_n(S^1, \varnothing)$.

La suite exacte de Mayer Vietoris est :

$$\ldots \longrightarrow H_n(A \cap B) \longrightarrow H_n(A) \oplus H_n(B) \longrightarrow H_n(X) \longrightarrow H_{n-1}(A \cap B) \longrightarrow \ldots$$

Nous obtenons alors que $H_n(X) = \{0\}$, pour tout $n \geq 2$, en effet $H_{n-1}(A \cap B) \cong H_n(A) \oplus H_n(B) \cong \{0\}$, pour tout $n \geq 2$.

Écrivons l'extrémité de la suite dans notre cas, avec les résultats précédents :

$$\ldots \longrightarrow \{0\} \longrightarrow G \oplus G \xrightarrow{\varphi_1} H_1(X) \xrightarrow{\Delta_1} G \xrightarrow{\psi_0} G \oplus G \xrightarrow{\varphi_0} H_0(X) \longrightarrow \{0\}$$

Montrons que ψ_0 est isomorphe à l'application diagonale $g \mapsto (g, g)$.

Par définition de la suite de Mayer-Vietoris, nous avons :

$$\psi_0(a) = (H_0(\iota_A)(a), H_0(\iota_B)(a)),$$

où ι_A et ι_B, sont les inclusions de $A \cap B$ dans A et dans B respectivement. Mais $A \cap B \simeq \{*\}$, et les inclusions du point dans un ensemble sont uniques, de même pour celle d'un ensemble dans le point. Cela nous indique que $H_0(\iota_A)$ et $H_0(\iota_B)$ sont isomorphes à l'identité dans G, car H_0 est un invariant homotopique. Ainsi l'application $\{*\} \to S^1 \to \{*\}$ devient Id_G sous le foncteur $H_0(-; G)$, d'où ψ_0 est bien isomorphe à l'application diagonale, qui injective, et telle que $Im(\psi_0) \cong G$.

Calculons $H_n(S^1 \vee S^1, \varnothing)$, pour $n = 1, 2$.

Par exactitude, φ_1 est injective, et $Im(\varphi_1) = ker(\Delta_1)$. Par le premier théorème d'isomorphisme de groupe, nous avons alors $G \oplus G \cong Im(\varphi_1) = ker(\Delta_1)$. De plus, l'exactitude et l'injectivité de l'application diagonale implique que $\{0\} = ker(\psi_0) = Im(\Delta_1)$.

Travaillant avec des applications ensemblistes, $Im(\Delta_1) = \Delta_1(H_1(X)) = \{0\}$, i.e. l'application Δ_1 envoie tout élément du groupe $H_1(X)$ sur 0, et nous trouvons alors $ker(\Delta_1) = H_1(X) \cong G \oplus G$.

Nous calculons maintenant $H_0(X)$. Nous savons que φ_0 est surjective, par exactitude. Ainsi le premier théorème d'isomorphisme assure que $(G \oplus G)/ker(\varphi_0) \cong H_0(X) = Im(\varphi_0)$. Calculons $ker(\varphi_0) = Im(\psi_0)$, par exactitude. Nous avons $Im(\psi_0) \cong G$, et alors, puisque $G \oplus G/ker(\varphi_0) \cong (G \oplus G)/G \cong G$, nous obtenons $H_0(X) \cong G$.

Finalement,

$$H_n(S^1 \vee S^1; G) = \begin{cases} G & : \text{si } n = 0 \\ G \oplus G & : \text{si } n = 1 \\ \{0\} & : \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

Scholie.

Ce résultat est nécessaire dans la deuxième partie. Nous avons par exactitude $G \cong Im(\psi_0) = \Delta(G) = \{(g, g) \mid g \in G\} = ker(\psi_0)$, et puisque $Im(\varphi_0) = H_0(X) = G$, nous avons obligatoirement le résultat suivant, où j_A est l'inclusion de A dans X, i.e. de S^1 dans $S^1 \vee S^1$, donné dans la définition de Mayer-Vietoris : $\phi_0(a, b) = H_0(j_A)(a) - H_0(j_B)(b) = a - b$, c'est la seule manière de vérifier les deux propriétés énoncées ci-dessus. Cela implique, que $H_0(j_A) : G \to G : g \mapsto g$, i.e. $H_0(j_A) = H_0(j_B) = Id_G$.

b) **Commençons par trouver une triade excissive pour le tore $X := S^1 \times S^1$.**

En enlevant un petit disque D_1 à la surface du tore, nous obtiendrons bien une triade excissive. Posons $A := (S^1 \times S^1) - \{*\} \simeq S^1 \vee S^1$, $B := D_1 \simeq \{*\}$, et $A \cap B \simeq S^1$. Voir les détails à la fin de la preuve.

Ainsi, par le point précédent, nous obtenons tout de suite que $H_n(X; G) = \{0\}$, pour tout $n \geq 3$. La suite exacte de Mayer-Vietoris, avec nos identifications, est

$$\begin{aligned} \ldots \longrightarrow \{0\} \longrightarrow H_2(X) \xrightarrow{\Delta_2} G \xrightarrow{\psi_1} G \oplus G \xrightarrow{\varphi_1} \\ \xrightarrow{\varphi_1} H_1(X) \xrightarrow{\Delta_1} G \xrightarrow{\psi_0} G \oplus G \xrightarrow{\varphi_0} H_0(X) \longrightarrow \{0\} \end{aligned}$$

Affirmation.

Nous avons que ψ_1 est l'application nulle, et que ψ_0 est isomorphe à l'application diagonale.

Calculons $H_2(X)$.

Par exactitude, Δ_2 est injective, et $Im(\Delta_2) = ker(\psi_1) = G$ (par l'affirmation). Ainsi Δ_2 est un isomorphisme, et $H_2(X) \cong G$.

Calculons $H_1(X)$.

Nous avons, par exactitude et par l'affirmation, que $Im(\psi_1) = ker(\varphi_1) = \{0\}$, et que $Im(\Delta_1) = ker(\psi_0) = \{0\}$. Cela et l'exactitude induit que φ_1 est un isomorphisme entre $G \oplus G$ et $H_1(X)$.

Finalement calculons $H_0(X)$.

L'exacitutde assure que $Im(\psi_0) = ker(\varphi_0)$, et que φ_0 est surjective, i.e. $H_0(X) = Im(\varphi_0)$. De plus, l'image de l'application diagonale est isomorphe à G. Le premier théorème d'isomorphisme nous permet de conclure,

$$H_0(X) = Im(\varphi_0) \cong (G \oplus G)/ker(\varphi_0) \cong (G \oplus G)/G \cong G$$

.

Démontrons l'affirmation.

Montrons que ψ_0 est isomorphe à l'application diagonale.

En effet, sa définition étant comme en a), mais avec la nouvelle triade excessive, nous savons que $i_B : S^1 \to \{*\}$ est uniquement déterminée, donc que $H_0(i_B)$ est forcément l'application nulle. De plus la Scholie en a) nous montre que l'inclusion de S^1 dans $S^1 \vee S^1$ est forcément l'identité de G sous l'invariant homotopique H_0. Ainsi ψ_0 est bien l'application diagonale, à isomorphisme près.

Montrons que ψ_1 est l'application nulle.

Rappelons sa définition :

$$\psi_1 : H_1(A \cap B) \to H_1(A) \oplus H_1(B) : (a) \mapsto (H_1(\iota_A)(a), H_1(\iota_B)(a)),$$

avec $i_A : S^1 \hookrightarrow S^1 \vee S^1$, et $i_B : S^1 \hookrightarrow \{0\}$ les inclusions. Déjà, $H_1(\iota_B)$ est l'application nulle, puisque $H_1(\{*\}; G) = \{0\}$. Analysons l'inclusion de S^1 dans $S^1 \vee S^1$. Nous avons besoin des résultats préliminaires.

Nous savons que, pour un entier $m \geq 1$,

$$H_n(\bigvee_{i=1}^{m} S^1; G) = \begin{cases} G & : \text{si } n = 0 \\ \bigoplus_{i=1}^{m} G & : \text{si } n = 1 \\ \{0\} & : \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

En effet un raisonnement par récurence conduit droit au résultat. Il suffit de choisir, pour la triade excessive, un ensemble A formé du wedge duquel on retire un point différent du point de base, et un ensemble B construit similairement mais en retirant le dit-point d'une copie du cercle différente de celle choisie pour A .

Soient les deux diagrammes suivants,

$$\begin{tikzcd}
S^1 \arrow[r, "\psi"] \arrow[rr, bend left, "\sigma_1"] \arrow[rrr, bend right, "\sigma_2"'] & S^1 \vee S^1 \arrow[rr, "p_1"] \arrow[rr, "p_2"'] & & S^1 \\
& & & S^1
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
S^1 \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "i_1"] \arrow[dd, bend right=60, "\lambda_1"] \arrow[ddr, bend right, "\lambda_2"'] & S^1 \vee S^1 \arrow[dr, "\nabla"] & \\
& & S^1
\end{tikzcd}$$

Sur la figure de gauche, l'application ψ est le pinçage, et les applications p_1 et p_2 dénotent les projections de la première, respectivement de la deuxième, copie du pinçage sur S^1. Nous montrons que les applications σ_i pour $i = 1, 2$ sont homotopes à l'identité. Traitons le cas où $i = 1$; en effet, la composition $p_1 \circ \psi$ est équivalente à appliquer $\sigma_1 : S^1 \to S^1 : \exp(i2\pi t) \mapsto \exp(i4\pi t)$, si $0 \leq t \leq 1/2$; 1 sinon. Et une homotopie entre σ_1 et l'identité est donnée par

$$H : S^1 \times I \to S^1 : (\exp i2\pi s, t) \mapsto \begin{cases} \exp(i2\pi(2-t)s) & : \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2-t}, \\ 1 & : \text{si } \frac{1}{2-t} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Nous vérifions facilement que H est bien l'homotopie souhaitée, et pouvons appliquer un raisonnement analogue pour montrer que σ_2 est homotope à l'identité.

En passant à l'homologie, $H_0(p_1 \circ \psi)(g) = (H_0(p_1) \circ H_0(\psi))(g) = g$. Similairement, $g = (H_0(p_2) \circ H_0(\psi))(g)$. Or $H_0(p_1)$, $H_0(p_2)$ sont les projections de la première copie, respectivement de la deuxième copie, de $G \oplus G$ sur G. Ainsi nous avons forcément $H_0(\psi) = (Id, Id)$.

Par récurrence, nous montrons que l'application de pinçage $\phi : S^1 \to S^1 \vee S^1 \vee S^1 \vee S^1$ est diagonale homologiquement. En effet, soit l'application de pinçage $\phi' : S^1 \to S^1 \vee S^1 \vee S^1$, et nous avons $p_{1,2} \circ \phi' \simeq \psi$, où ψ le pinçage définit plus haut, et où $p_{1,2}$ est la projection des deux premières copies du double wedge dans le wedge. Ces égalités à homotopie près étant vraies pour $p_{2,3}$ et $p_{1,3}$, qui sont définies similairement, nous obtenons homologiquement que $H_1(\phi) = (Id, Id, Id)$. Par une étape en plus, nous avons

$$H_1(\phi) : G \longrightarrow G \oplus G \oplus G \oplus G : g \longmapsto (g, g, g, g).$$

Nous voyons sur le diagramme de droite, où ∇ est le pliage, que les applications λ_1 et λ_2 sont l'identité dans S^1, par la définition du pliage. En passant à l'homologie, nous obtenons respectivement que $H_j(i_1)$ est la projection sur la première copie de G, $H_j(i_2)$ sur la deuxième, pour $j = 0, 1$. Alors, puisque$H_1(\nabla)$ est un homomorphisme de groupe,

$$H_1(\nabla)(x, y) = H_1(\nabla)((x, 0) + (0, y)) = H_1(\nabla \circ i_1)(x) + H_1(\nabla \circ i_2)(y) = x + y.$$

Maintenant, en remarquant que le pliage $\Lambda : S^1 \vee S^1 \vee S^1 \vee S^1 \to S^1 \vee S^1$ est en fait équivalent à plier les deux copies de wedge, nous pouvons écrire $\Lambda = \nabla \vee \nabla$, où ∇ dénote toujours le pliage que nous connaissons. Nous obtenons homologiquement, en voyant le wedge comme la projection sous homologie, que $H_1(\Lambda) : G \oplus G \oplus G \oplus G \longrightarrow G \oplus G : (w, x, y, z) \longmapsto (w + x, y + z)$.

Le dessin numéro 2 représente l'inclusion du cercle (vu comme le carré) dans le wedge. En dessinant à nouveau le wedge comme le carré dont nous identifions les cotés, nous voyons comment l'inclusion ι_A se comporte : le premier quart (a) du cercle est inclus dans le bord inférieur du carré, le second (b) (dans le sens trigonomètrique) dans le bord latéral droite, le troisième quart (a^{-1}) est inclus dans le bord supérieur, le quatrième (b^{-1}) dans le bord latéral gauche. Le sens de parcours des parties du cercle est inversé dans des côtés opposés du wedge (par rapport à l'identification).

Il est nécessaire d'analyer l'application $R : S^1 \to S^1 : \exp(i2\pi t) \mapsto \exp(-i2\pi t)$, qui parcourt le cercle en sens inverse. Nous avons alors que $\nabla \circ (Id \vee R) \circ \psi$ est homotopiquement nulle, et donc sous H_1, nous avons $H_1(\nabla \circ (Id \vee R) \circ \psi)(x) = Id(x) + H_1(R(x)) = 0$, d'où $H_1(R) = -Id$.

Ainsi, nous pouvons factoriser l'inclusion; au travers de la relation d'équivalence qui identifie x_0, y_0, z_0, w_0 du carré en un point, vu comme le triple wedge de copie de S^1, puis en appliquant deux pliages, l'un entre les copies nommées a, a^{-1}, l'autre entre les copies nommées b, b^{-1}, d'où la notation $\nabla \vee \nabla$. Explicitement la première application est exactement le pinçage ϕ, la deuxième, qui s'applique au wedge vu comme sous-espace de l'espace produit, est donnée par $\nabla \vee \nabla := (\nabla \circ (Id, R), \nabla \circ (Id, R))$, où la partie de gauche est appliquée à la copie a, a^{-1} du wedge et celle de droite à la copie du wedge b, b^{-1}.

Nous vérifions qu'il s'agit de la bonne factorisation, et surtout vérifions que le sens d'inclusion des parties du cercle est bien comme sur la figure 2. S.p.d.g. disons que $x_0 = 0 \sim 1$ (on considère $S^1 = I/\delta I$), et prenons deux élément du segment a, disons $1/8 - \epsilon$ et $1/8 + \epsilon$, pour ϵ assez petit. Alors $\nabla \vee \nabla \circ \phi(1/8 - \epsilon) = \nabla \vee \nabla(1/2 - 4\epsilon, x_0, x_0, x_0) = (1/2 - 4\epsilon, x_0)$. De même $1/8 + \epsilon$ est envoyé sur $1/2 + 4\epsilon$, donc le sens de parcours se comporte bien par rapport à la factorisation. Similairement, nous vérifions que $\nabla \vee \nabla \circ \phi(5/8 - \epsilon) = \nabla \vee \nabla(x_0, x_0, 5/2 - 4\epsilon) = (1/2 + 4\epsilon)$, et que $5/8 + 4\epsilon$ est envoyé sur $1/2 - 4\epsilon$, nous avons utilisé le fait que $5/2 \sim 1/2$ dans $S^1 \simeq I/\delta I$.

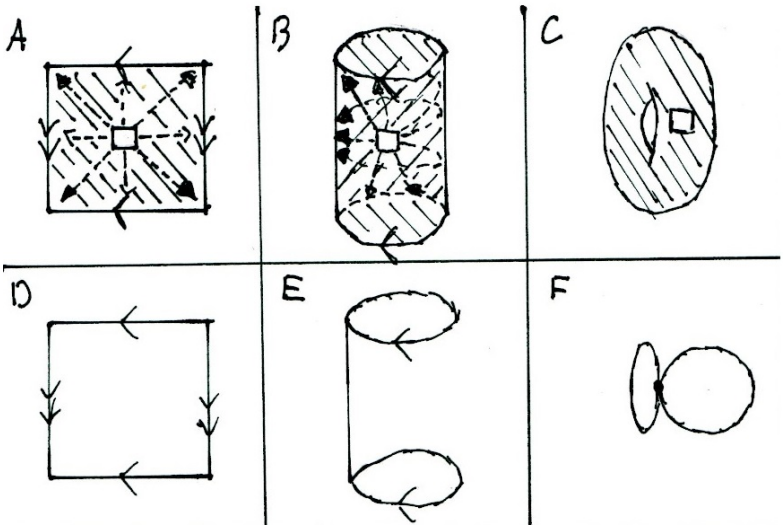
Passons à l'homologie sous H_1,

$$H_1(\iota_A)(g) = H_1((\nabla \circ (Id, R), \nabla \circ (Id, R)) \circ \phi) = (H_1(Id + R), H_1(Id + R)) = (Id - Id, Id - Id) = (0, 0).$$

L'affirmation est démontrée, je reste à votre disposition pour d'éventuelles questions.

$\square$

Figure no 1


A
B
C
D
E
F

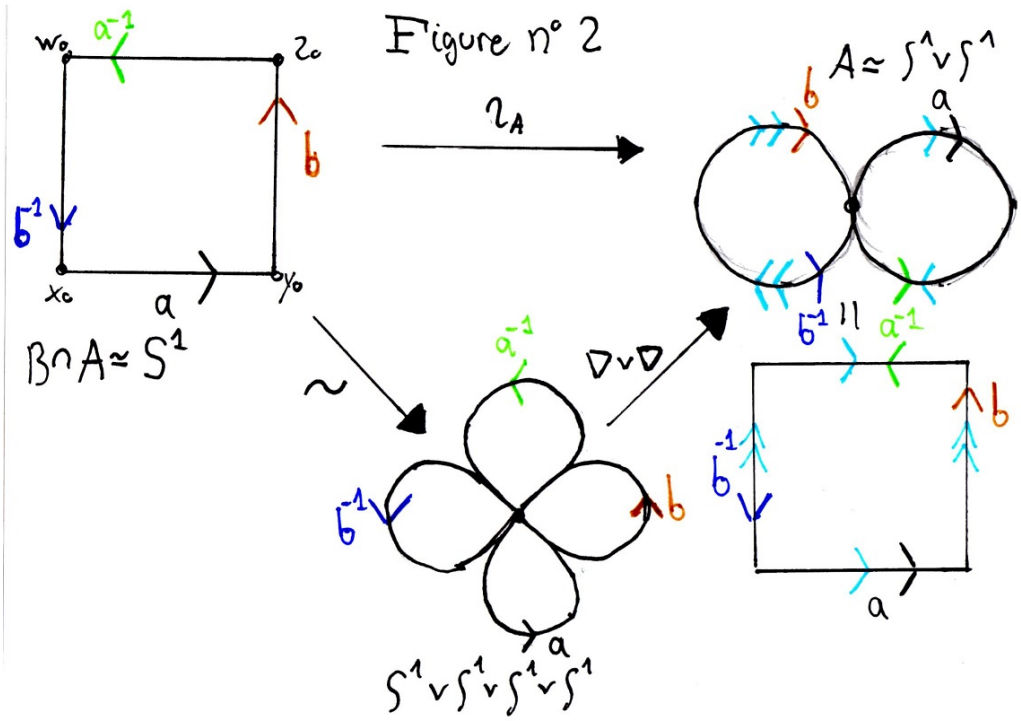


Figure n° 2
w_0
z_0
x_0
y_0
a^{-1}
b
b^{-1}
a
$B \cap A \simeq S^1$
r_A
$A \simeq S^1 \vee S^1$
$\sim$
$D \vee D$
$S^1 \vee S^1 \vee S^1 \vee S^1$

Exercise Set 4 Exercise 2

Valerian K Scheurer

November 12, 2013

1 Part a

Let B^2 be the closed unit ball in the plane, and consider the (set) map $\lambda : B^2 \to B^2$ defined by

$$\lambda(x) = \begin{cases} \lambda_d(x) & \text{if } x \in \partial B^2 \\ x & \text{otherwise.} \end{cases}$$

This map is a surjection, and we can therefore define X to be B^2 under the induced quotient toplogy, i.e. the topology under which $\lambda : B^2 \to X$ is a quotient map. We will show that this space has homology groups

$$H_m(X, \mathbb{Z}) = \begin{cases} 0 & : m \geq 2 \\ \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} & : m = 1 \\ \mathbb{Z} & : m = 0. \end{cases}$$

Let $A = B^2 - \{0\}$ and $B = B^2 - \partial B^2$. Then $(X; \lambda(A), \lambda(B))$ is an excisive triad. Indeed, $A \cup B = B^2$, so, since λ is a surjection $\lambda(A) \cup \lambda(B) = X$; $\lambda(A)$ and $\lambda(B)$ are open since λ maps A to A and B to B, so A and B are both saturated.

We can therefore study the Meyer-Vietoris sequence that corresponds to this excisive triad:

$$... \to H_{n+1}(X) \xrightarrow{\Delta_{n+1}} H_n(A \cap B) \xrightarrow{\psi_n} H_n(A) \oplus H_n(B) \xrightarrow{\phi_n} H_n(X) \xrightarrow{\Delta_n} H_{n-1}(A \cap B) \to ...$$

We show that $\lambda(A) \simeq_* S^1$, $\lambda(B) \simeq_* \{*\}$, and $\lambda(A \cap B) \simeq_* S^1$.

First, let's show $\lambda(A) \simeq_* S^1$. Let $H : I \times A \to A$ be defined by $H(t, x) = \left((1-t) + \frac{t}{||x||}\right) x$, so $H(0, A) = A$ and $H(1, A) = \partial B^2$. Since I is locally compact Hausdorff, by an exercise in the Munkres, the map $\mathrm{id} \times \lambda : I \times A \to I \times \lambda(A)$ is also a quotient map, thus since $H(t, x) = x \ \forall t$ if $x \in \partial B^2$ and since $\lambda^{-1}(\{x\})$ is a singleton if $x \notin \partial B^2$, $(\lambda \circ H)(t, x)$ is constant on sets of the form $\lambda^{-1}(\{x\})$. Thus, there is a map $H^* : I \times \lambda(A) \to \lambda(A)$ that makes the following diagram commute:

$$\begin{tikzcd} I \times A \arrow[d, "\mathrm{id}\times\lambda"'] \arrow[dr, "\lambda\circ H"] & \\ I \times \lambda(A) \arrow[r, "H^*"'] & \lambda(A) \end{tikzcd}$$

But then $H^*(0, \lambda(A)) = \lambda(A)$ and $H^*(1, \lambda(A)) = \lambda(\partial B^2)$, so $\lambda(A)$ is homotopy equivalent to $\lambda(\partial B^2)$. We also have that $\lambda(\partial B^2) \simeq_* S^1$. This follows from the fact that $\lambda|_{\partial B^2} = \lambda_d$ and the fact that ∂B^2 is a saturated closed set, thus there exists a homeomorphism g to make the following diagram commute,

since λ_d is an open map, and therefore a quotient map.

$$\begin{tikzcd} \partial B^2 \arrow[d, "\lambda"'] \arrow[dr, "\lambda_d"] & \\ \lambda(\partial B^2) \arrow[r, "g"'] & S^1 \end{tikzcd}$$

Putting those two facts together, we conclude that $A \simeq_* S^1$.

We now show that $\lambda(B) \simeq_* \{*\}$, and $\lambda(A \cap B) \simeq_* S^1$. Consider the maps $G : I \times B \to B$ defined by $G(t,x) = tx$ and $K : I \times (A \cap B) \to A \cap B$ defined by $K(t,x) = \left((1-t) + \frac{t}{2||x||}\right) x$. Then $G(0,B) = B,\ G(1,B) = \{0\},\ K(A \cap B) = A \cap B$, and $K(1, A \cap B) = \frac{1}{2}S^1 = \{\frac{1}{2}x | x \in S^1\}$. (As usual, we consider S^1 to be a subset of $\mathbb{C}$.) Since λ is the identity on B and $A \cap B$, these are also true with B and $A \cap B$ replaced with $\lambda(B)$ and $\lambda(A \cap B)$ respectively.

Thus, when $n > 1$, $H_n(A) \cong H_n(A \cap B) \cong H_n(S^1) \cong 0$, and when $n > 0$, $H_n(B) \cong H_n(*) \cong 0$. So when $n > 1$, the following is a subsequence of the Meyer-Veytoris sequence:

$$0 \cong H_{n+1}(A) \oplus H_{n+1}(B) \to H_n(X) \to H_n(A \cap B) \cong 0$$

Therefore $H_n(X) \cong 0$ when $n > 1$. The end of the Meyer-Vietoris sequence then looks like this:

$$0 \to H_2(X) \xrightarrow{\Delta_2} H_1(A \cap B) \xrightarrow{\psi_1} H_1(A) \oplus H_1(B) \xrightarrow{\phi_1} H_1(X) \xrightarrow{\Delta_0} H_0(A \cap B) \xrightarrow{\psi_0} H_0(A) \oplus H_0(B) \xrightarrow{\phi_0} H_0(X) \to 0$$

Since Δ_2 is injective, $H_2(X) \cong Im(\Delta_2) = Ker(\psi_1)$. Since ϕ_0 is surjective, $H_0(X) \cong H_0(A) \oplus H_0(B)/Ker(\phi_0) = H_0(A) \oplus H_0(B)/Im(\psi_0)$.

Let us therefore study the maps ψ_0 and ψ_1.

We write ι_A for the inclusion of $\lambda(A \cap B)$ into $\lambda(A)$ and ι_B for the inclusion of $\lambda(A \cap B)$ into $\lambda(B)$. We have $\psi_1(a) = (H_1(\iota_A)(a), H_1(\iota_B)(a)) = (H_1(\iota_A)(a), 0)$ (since $H_1(B)$ is trivial). Thus $Ker(\psi_1) = Ker(H_1(\iota_A))$. We've seen before that $\lambda(A \cap B)$ deformation retracts onto $\frac{1}{2}S^1$. Thus, up to homotopy, we need only study the inclusion of $\frac{1}{2}S^1$ into A. Now, if $e^{i\theta} \in S^1$, then with H^* defined as before, and since $\lambda(\frac{1}{2}e^{i\theta}) = \frac{1}{2}e^{i\theta}$, we have $H^*(0, e^{i\theta}) = H^*(0, \lambda(e^{i\theta})) = e^{i\theta}$, and $H^*(1, e^{i\theta}) = H^*(1, \lambda(e^{i\theta})) = \lambda_d(e^{i\theta})$, thus, $H_1(\iota_A) = H_1(\lambda_d)$.

We can factor λ_d through the d-fold wedge: let $U = \bigvee_{i=1}^d S^1 = \{1...d\} \times S^1/_{(i,1) \sim (j,1)\ \forall i,j}$, then let $\mu : S^1 \to U$ be defined by $\mu(e^{i\theta}) = [(\lfloor d * \theta / 2\pi \rfloor + 1, e^{id\theta})]$ and let $\pi : U \to S^1$ be defined by $\pi([n,x]) = x$. Then $\lambda_d = \pi \circ \mu$. Recall that $H_1(U; \mathbb{Z}) \cong \bigoplus_{i=1}^d \mathbb{Z}$. By an argument in the solution of the previous exercise, $H_1(\pi)(g) = (g, g, ...g)$. Now, if $i_k : S^1 \to U$ is the inclusion into the k-th part of U defined by $i_k(s) = [(k,s)]$, then we have $\mu \circ i_k = \mathrm{id}_{S^1}$, so

$$\begin{aligned} H_1(\mu)(g_1, g_2, ..., g_d) &= H_1(\mu)(g_1, 0, ..., 0) + H_1(\mu)(0, g_2, ..., 0) + ... + H_1(\mu)(0, 0, ..., g_d) \\ &= H_1(i_1)(g_1) + H_1(i_2)(g_2) + ... + H_d(i_d)(g_d) \\ &= g_1 + g_2 + ... + g_d \end{aligned}$$

Therefore $H_1(\lambda_d)(a) = H_1(\pi) \circ H_1(\mu)(a) = da$. This then implies that $Ker(\psi_1)$ is trivial, and therefore that $Im(\Delta_2)$ is also trivial, so $H_2(X) \cong 0$.

We now turn our attention to ψ_0.

Again, $\psi_0(a) = (H_0(\iota_A)(a), H_0(\iota_B)(a))$, so we must study the maps $H_0(\iota_A)$ and $H_0(\iota_B)$. There is only one map ! from S^1 to $\{*\}$, and we recall that $H_0(!; \mathbb{Z})$ is an isomorphism. Thus, for any inclusion of a point into the circle $p : \{*\} \to S^1$, since $! \circ p$ is the identity, $H_0(p)$ is also an isomorphism. Therefore, since $B \cong \{*\}$, $H_0(\iota_B)$ is an isomorphism.

By a similar argument as before, calculating $H_0(\iota_A)$ comes down to calculating $H_0(\lambda_d)$. Again, if we factor through the wedge, we will find that $H_0(\iota_A)$ is an isomorphism.

Thus, $\psi_0 \cong \Delta$ the diagonal map, and since $H_0(X) \cong \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/Im(\psi_0)$, we have $H_0(X) \cong \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/Im(\psi_0) \cong \mathbb{Z}$.

We also have that $Ker(\psi_0) = 0$, so $Im(\Delta_0) = 0$ and the following sequence is exact:

$$0 \to H_1(A \cap B) \xrightarrow{\psi_1 \cong H_1(\lambda_d)} H_1(A) \oplus H_1(B) \xrightarrow{\phi_1} H_1(X) \to 0$$

Thus $H_1(X) \cong H_1(A) \oplus H_1(B)/Im(\lambda_d) \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.

2 Part b

We will show that setting $M(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, n) = \Sigma^{n-1}M(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, 1)$ will work. It was proven in the course that $H_{n+1}(\Sigma X; \mathbb{Z}) \cong H_n(X; \mathbb{Z})$ when $n \geq 1$. If we can demonstrate that $H_1(\Sigma^n M(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}; \mathbb{Z}); \mathbb{Z}) = 0$ and $H_0(\Sigma^n M(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}); \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ for all $n \geq 1$, the result will follow by induction.

In the rest of this proof, we will write M_n for $\Sigma^{n-1}M(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, 1)$

Recall that $\Sigma M_n = M_n \times [0,1]/_{(x,0)\sim(y,0),(x,1)\sim(y,1)}$. Let $A_{n+1} = \{[x,t] \in \Sigma M_n | t > 0\}$ and $B_{n+1} = \{[x,t] \in \Sigma M_n | t < 1\}$ for all $n \geq 1$. Then $(\Sigma M_n; A_n, B_n)$ is an exisive triad, and the following is the end of the corresponding Meyer-Vietoris sequence:

$$0 \to H_1(\Sigma M_n) \to H_0(A \cap B) \xrightarrow{\psi_0} H_0(A) \oplus H_0(B) \xrightarrow{\phi_0} H_0(\Sigma M_n) \to 0$$

where we used that that $A_n \simeq_* \{*\}$ and $B_n \simeq_* \{*\}$ so $H_1(A_n)$ and $H_1(B_n)$ are both trivial. (Note also that $A_n \cap B_n \simeq_* M_{n-1}$.)

As a recurrence hypothesis, suppose that $H_0(!_n) : H_0(M_n) \to H_0(*)$ is an isomorphism, and that $H_0(M_n) = \mathbb{Z}$. (These are certainly true about M_1, as we've shown in Part a, so the recurrence can start.) Then $\psi_0(a) = (H_0(\iota_A)(a), H_0(\iota_B)(a)) = (H_0(!)(a), H_0(!)(a)) = (a, a)$ up to isomorphism, so $Ker(\psi_0)$ is trivial and thus $H_1(M_{n+1}) = H_1(\Sigma M_n) \cong 0$, and $Im(\psi_0)$ is the diagonal subset of $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, so $H_0(M_{n+1}) \cong H_0(\Sigma M_n) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/Im(\psi_0) \cong \mathbb{Z}$.

Finally, we must show that $H_0(!_{n+1})$ is an isomorphism. By the previous paragraph, ϕ_0 is a surjective map from $H_0(A) \oplus H_0(B)$ to $H_0(\Sigma M_n)$. The definition of ϕ_0 was $\phi_0 = H_0(j_A) - H_0(j_B)$ where j_A and j_B are their respective inclusions in the suspension. However, if we consider the homeomorphism $f : \Sigma M_n \to \Sigma M_n$ defined by $f([x,t]) = [x, 1-t]$, we see that $j_A = f \circ j_B \circ f|_A$, so $H_0(j_A)$ and $H_0(j_B)$ must be the same map. Thus, the image of a generator must be a generator on either of them, and therefore either of them is an isomorphism. Since $j_A \cong p$ where p is the inclusion of a point, $!_{n+1} \circ p = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$, $H_0(!_{n+1})$ is also an isomorphism.

3 Part c

Since each of the groups A_m is finitely generated, we can write $A_m = \mathbb{Z}/p_1\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p_2\mathbb{Z} \oplus ... \oplus \mathbb{Z}/p_n\mathbb{Z}$ where each p_k is either a prime number or 0, in which case $\mathbb{Z}/p_k\mathbb{Z}$ is just $\mathbb{Z}$. We let $M(\mathbb{Z}, n) = S^n$. Then, if we just let $X_m = \bigsqcup_{i=1}^n M(\mathbb{Z}/p_i\mathbb{Z}, m)$, by the additivity axiom, we will have that $H_m(X_m; \mathbb{Z}) = A_m$ and $H_n(X_m; \mathbb{Z}) = 0$ if $n \neq m$ and $n \neq 0$. Finally, if we let $X = \bigsqcup_{i=1}^\infty X_m$, then again by the additivity axiom we will have

$$H_m(X; \mathbb{Z}) = A_m \quad \forall m \geq 1.$$