Exercice 2 (The 5-Lemma)

Soit

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\alpha_1"] & A_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\alpha_2"] & A_3 \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "\alpha_3"] & A_4 \arrow[r, "f_4"] \arrow[d, "\alpha_4"] & A_5 \arrow[d, "\alpha_5"] \\ B_1 \arrow[r, "g_1"] & B_2 \arrow[r, "g_2"] & B_4 \arrow[r, "g_3"] & B_4 \arrow[r, "g_4"] & B_5 \end{tikzcd}$$

un diagramme commutative dans **Ab** avec lignes exactes. Montrer que si

- α_2 et α_4 sont des isomorphismes,
- α_1 est surjectif, et
- α_5 est injectif,

alors α_3 est un isomorphisme.

Démonstration. On montre que α_3 est injectif. Soit $a \in \ker(\alpha_3) \subseteq A_3$, comme le diagramme est commutatif, on a que $0 = (g_3 \circ \alpha_3)(a) = (\alpha_4 \circ f_3)(a)$ et on en tire que $f_3(a) \in \ker(\alpha_4)$. Comme α_4 est injectif $f_3(a) = 0$, i.e. $a \in \ker(f_3)$. Comme les lignes sont exactes, $a \in \ker(f_3) = \mathrm{Im}(f_2)$, par conséquent il existe $b \in A_2$ tel que $a = f_2(b)$. Ainsi on a :

$$0 = \alpha_3(a) = (\alpha_3 \circ f_2)(b) = (g_2 \circ \alpha_2)(b)$$

Donc $\alpha_2(b) \in \ker(g_2)$. Par exactitude des lignes, $\alpha_2(b) \in \ker(g_2) = \mathrm{Im}(g_1)$ et donc il existe $c \in B_1$ qui satisfait $g_1(c) = \alpha_2(b)$. Par surjectivité de α_1, il existe $d \in A_1$ tel que $\alpha_1(d) = c$. Donc

$$\alpha_2(b) = g_1(c) = (g_1 \circ \alpha_1)(d) = (\alpha_2 \circ f_1)(d)$$

(on a utilisé la commutativité du diagramme pour la dernière égalité) et par injectivité de α_2, on obtient que $b = f_1(d)$, i.e. que $b \in \mathrm{Im}(f_1) = \ker(f_2)$. Grâce au fait que les lignes sont exactes on peut conclure que

$$a = f_2(b) = f_2(f_1(d)) = 0.$$

Ainsi α_3 est bien injectif.

Maintenant on montre que α_3 est surjectif. Soit $a \in B_3$, alors $g_3(a) \in B_4$. Par surjectivité de α_4, il existe $b \in A_4$ tel que $g_3(a) = \alpha_4(b)$ et donc par exactitude des lignes $g_4(\alpha_4(b)) = 0$. Comme le diagramme est commutatif on a

$$0 = (g_4 \circ \alpha_4)(b) = (\alpha_5 \circ f_4)(b)$$

et en utilisant l'injectivité de α_5 on en déduit que $f_4(b) = 0$, i.e. $b \in \ker(f_4) = \mathrm{Im} f_3$. Donc il existe $c \in A_3$ qui satisfait $f_3(c) = b$ et on a

$$\begin{aligned} g_3(a - \alpha_3(c)) &= g_3(a) - g_3(\alpha_3(c)) \\ &= \alpha_4(b) - \alpha_4(f_3(c)) \\ &= \alpha_4(b) - \alpha_4(b) = 0, \end{aligned}$$

i.e. $a - \alpha_3(c) \in \ker(g_3) = \mathrm{Im}(g_2)$. Comme α_2 est surjectif, il existe $e \in A_2$ tel que $\alpha_2(e) = d$ et par conséquent on a

où
$d = a - \alpha_3(c)$

$$\begin{aligned}\alpha_3(f_2(e) + c) &= \alpha_3(f_2(e)) + \alpha_3(c)\\ &= g_2(\alpha_2(e)) + \alpha_3(c)\\ &= g_2(d) + \alpha_3(c)\\ &= a - \alpha_3(c) + \alpha_3(c) = a\end{aligned}$$

C'est à dire que, comme $f_2(e) + c \in A_3$, il existe un élément de A_3 qui a comme image par α_3 a. Donc α_3 est surjectif.
On a ainsi montré que α_3 est un homomorphisme bijectif de groupes abéliens, i.e. un isomorphisme.

□

Homotopie et homologie
Exercise set 03

Nathan Scheinmann

3. Let $\tau_* : E_* \to E'_*$ be a morphism of homology theories on $\mathbf{Top}_{rel}$, i.e., $\tau_* = \{\tau_n \mid n \geq 0\}$, where, for every n, $\tau_n : E_n \to E'_n$ is a natural transformation such that $\tau_{n-1}\partial_n = \partial'_n \tau_n$.
Apply the 5-Lemma to proving that if:

$$(\tau_n)_{(X,\emptyset)} : E_n(X,\emptyset) \to E'_n(X,\emptyset)$$

is an isomorphism for all topological spaces X, then:

$$(\tau_n)_{(X,A)} : E_n(X,A) \to E'_n(X,A)$$

is an isomorphism for all pairs (X, A).

Proof. In view of using the 5-Lemma, we write the following diagram for all $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{tikzcd}
E_n(A,\emptyset) \arrow[r, "E_{n,j}"] \arrow[d, "(\tau_n)_{(A,\emptyset)}"'] & E_n(X,\emptyset) \arrow[r, "E_n(\mathrm{Id}_X, U_A)"] \arrow[d, "(\tau_n)_{(X,\emptyset)}"'] & E_n(X,A) \arrow[r, "(\partial_n)_{(X,A)}"] \arrow[d, "(\tau_n)_{(X,A)}"'] & E_{n-1}(A,\emptyset) \arrow[r, "E_{n-1,j}"] \arrow[d, "(\tau_{n-1})_{(A,\emptyset)}"'] & E_{n-1}(X,\emptyset) \arrow[d, "(\tau_{n-1})_{(X,\emptyset)}"'] \\
E'_n(A,\emptyset) \arrow[r, "E'_{n,j}"] & E'_n(X,\emptyset) \arrow[r, "E'_n(\mathrm{Id}_X, U_A)"] & E'_n(X,A) \arrow[r, "(\partial'_n)_{(X,A)}"] & E'_{n-1}(A,\emptyset) \arrow[r, "E'_{n-1,j}"] & E'_{n-1}(X,\emptyset).
\end{tikzcd}$$

To apply the 5-Lemma, we need to check the following assumptions:

1. The diagram commutes,
2. The rows are exact,
3. $(\tau_n)_{(A,\emptyset)}$ surjective,
4. $(\tau_{n-1})_{(X,\emptyset)}$ injective,
5. $(\tau_{n-1})_{(A,\emptyset)}$ and $(\tau_n)_{(X,\emptyset)}$ isomorphisms.

The fact that the first, second and fourth square of the diagram commute follows directly from the hypothesis that τ_n is a natural transformation between the two functors E_n and E'_n. The third square of the diagram commutes as $\tau_{n-1}\partial_n = \partial'_n\tau_n$.
The second condition is a straightforward application of [H2], the exactitude axiom for the homology theories E_* and E'_*. Moreover, conditions 3. to 5. hold by our hypothesis on τ_n, which is that $(\tau_n)_{(X,\emptyset)}$ is an isomorphism for all topological spaces X. Hence, by the 5-Lemma, $(\tau_n)_{(X,A)}$ is an isomorphism for all $n \in \mathbb{N}^*$.
For the case n=0, we get the following diagram:

$$\begin{tikzcd}
E_0(A,\emptyset) \arrow[r, "E_{0,j}"] \arrow[d, "(\tau_0)_{(A,\emptyset)}"'] & E_0(X,\emptyset) \arrow[r, "E_0(\mathrm{Id}_X, U_A)"] \arrow[d, "(\tau_0)_{(X,\emptyset)}"'] & E_0(X,A) \arrow[r] \arrow[d, "(\tau_0)_{(X,A)}"'] & 0 \\
E'_0(A,\emptyset) \arrow[r, "E'_{0,j}"] & E'_0(X,\emptyset) \arrow[r, "E'_0(\mathrm{Id}_X, U_A)"] & E'_0(X,A) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

A very similar argument shows that an analogue of the 5-Lemma holds and so the result follows. $\square$

Corrigé série 3, exercice 4

Jonathan Moustakis

3 décembre 2013

Nous montrons le point $a)$ et $b)$ en même temps. Considérons la courte suite exacte

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "j"] & B \arrow[r, "p"] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Dans **Ab**. Et montrons que les trois assertions suivantes sont équivalentes.

1) Il existe un homomorphisme $r : B \to A$ tel que $r \circ j = Id_A$.
2) Il existe un homomorphisme $s : C \to B$ tel que $p \circ s = Id_C$.
3) Il existe un isomorphisme $\varphi : A \oplus C \xrightarrow{\cong} B$, tel que $\varphi \circ \iota_A = j$ et $p \circ \varphi = \pi_C$, où $\iota_A : A \hookrightarrow A \oplus C$ et $\pi_C : A \oplus C \to C$ sont respectivement l'inclusion et la projection naturelle.

Démonstration. 3) $\Rightarrow$ 1)
Notons $\pi_A : A \oplus C \to A$, la projection naturelle et $\varphi^{-1} : B \to A \oplus C$, l'inverse de φ qui est donné par hypothèse. Posons $r := \pi_A \circ \varphi^{-1}$.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "j"] \arrow[dr, bend right, "\iota_A"'] & B \arrow[r, "p"] \arrow[d, bend left, "\varphi^{-1}"] & C \arrow[r] & 0 \\ & & A \oplus C \arrow[ul, "\pi_A"] \arrow[u, bend left, "\varphi"] & & \end{tikzcd}$$

Alors, on a : $r \circ j = \pi_A \circ \varphi^{-1} \circ j = \pi_A \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \iota_A = \pi_A \circ \iota_A = Id_A$.

3) $\Rightarrow$ 2)
Notons $\iota_C : C \hookrightarrow A \oplus C$, l'inclusion naturelle et posons $s := \varphi \circ \iota_C$.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "j"] & B \arrow[r, "p"] \arrow[d, bend left, "\varphi^{-1}"] & C \arrow[r] \arrow[dl, bend left, "\iota_C"] & 0 \\ & & A \oplus C \arrow[ur, "\pi_C"] \arrow[u, bend left, "\varphi"] & & \end{tikzcd}$$

On a : $p \circ s = p \circ \varphi \circ \iota_C = \pi_C \circ \iota_C = Id_C$.

1) $\Rightarrow$ 3)
$\forall b \in B$, $b = b - (j \circ r)(b) + (j \circ r)(b)$. Or $(j \circ r)(b) \in Im(j)$ et $b - (j \circ r)(b) \in Ker(r)$, car $r(b - (j \circ r)(b)) = r(b) - r((j \circ r)(b)) = r(b) - \underbrace{(r \circ j)}_{Id_A}(r(b)) = r(b) - r(b) = 0$.

De plus, $Im(j) \cap Ker(r) = \{0\}$. En effet, si $b \in Im(j) \cap Ker(r)$, alors $\exists a \in A$ tel que $j(a) = b$ et $r(b) = 0$ alors, $0 = r(b) = r(j(a)) = (r \circ j)(a) = a$ et donc $b = 0$. Ceci montre que

$$B = Im(j) \oplus Ker(r).$$

Donc, $\forall b \in B$, b peut être exprimé par un certain $a \in A$ et $k \in Ker(r)$ tels que $b = j(a) + k$. Puisque la suite est exacte, on a $Im(j) = Ker(p)$. La suite $B \xrightarrow{p} C \longrightarrow 0$ implique que p et surjectif. Ainsi, $\forall c \in C, \exists b = j(a) + k$ tel que $c = p(b) = p(j(a) + k) = (p \circ j)(a) + p(k) = p(k)$. Par conséquent, $\forall c \in C$, $\exists k \in Ker(r)$ tel que $c = p(k)$ et $p(Ker(r)) = C$. Si $p(k) = 0$ avec $k \in Ker(r)$, alors $k \in Im(j)$. Or $Im(j) \cap Ker(r) = \{0\}$ donc $k = 0$. Par conséquent, la restriction $p|_{Ker(r)} : Ker(r) \to C$ est un isomorphisme et on a $Ker(r) \cong C$. Finalement, puisque $Ker(j) = \{0\}$ par exactitude de la suite, on a que $A \cong Im(j)$. On trouve ainsi, que

$$B \cong A \oplus C.$$

2) $\Rightarrow$ 3) Nous procédons d'une manière analogue que le cas précédent.
$\forall b \in B$, $b = b-(s\circ p)(b)+(s\circ p)(b)$. Or $(s\circ p)(b) \in Im(s)$ et $b-(s\circ p)(b) \in Ker(p)$, car $p(b - (s \circ p)(b)) = p(b) - p((s \circ p)(b)) = p(b) - \underbrace{(p \circ s)}_{Id_C}(p(b)) = p(b) - p(b) = 0$.
De plus, $Im(s) \cap Ker(p) = \{0\}$. En effet, si $\exists c \in C$ tel que $s(c) \in Im(s)$ et $s(c) \in Ker(p)$, on a $0 = p(s(c)) = (p \circ s)(c) = c$. Donc $s(c) = s(0) = 0$. Ceci montre que

$$B \cong Im(s) \oplus Ker(p) \cong Ker(p) \oplus Im(s).$$

Donc, $\forall b \in B$, b peut être exprimé par un certain $c \in C$ et $k \in Ker(p)$ tels que $b = s(c) + k$. Puisque $Ker(j) = \{0\}$ par exactitude de la suite, on a que $A \cong Im(j)$. De plus, $Im(j) = Ker(p)$. Par conséquent, $A \cong Ker(p)$. Finalement, puisque s est une section, s est injective. Par conséquent, $Im(s) \cong C$. Ceci montre que

$$B \cong A \oplus C$$

Ceci montre les point $a)$ et $b)$. ☐

c) **Exemple 1 :** Considérons la suite

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Où $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est défini par $p([x]_4) = [x]_2$. Ces applications, sont bien définies. En effet, si $[x]_2 = [x']_2$, alors $x' = x + 2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Par conséquent,

$$[x']_2 \mapsto [2x']_4 = [2(x + 2k)]_4 = [2x + 4k]_4 = [2x]_4.$$

Il en est de même pour l'homomorphisme p. Si $[x]_4 = [x']_4$, alors $x' = x + 4k$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Donc,

$$[x']_4 \mapsto [x']_2 = [x + 4k]_2 = [x]_2.$$

Il nous faut montrer que l'homomorphisme $Im(\cdot 2) \subset Ker(p)$. On a

$$[0]_2 \quad \xmapsto{\cdot 2} \quad [0]_4 \in Ker(p),$$

$$[1]_2 \quad \xmapsto{\cdot 2} \quad [2]_4 \in Ker(p).$$

On a bien $Im(\cdot 2) \subset Ker(p)$, de plus $Im(\cdot 2)$ est injective car $Ker(\cdot 2) = \{[0]_2\}$. Montrons maintenant que $Ker(p) \subset Im(\cdot 2)$. Soit $[x]_4 \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ tel que $[x]_2 = [0]_2$. donc 2 divise x, i.e., $x = 2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Donc $[x]_4 = [2k]_4$. Par conséquent, $[k]_2 \quad \xmapsto{\cdot 2} \quad [2k]_4$, ce qui montre que $Ker(p) \subset Im(\cdot 2)$. La surjectivité de p est immédiate. Ceci montre donc que la suite est bien exacte. Montrons à présent qu'elle n'est pas scindée. Nous avons montré dans le point précédent que la suite est scindée si et seulement si $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Mais $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ est cyclique alors que $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ne l'est pas. Par conséquent, la suite n'est pas scindée.

Exemple 2 : Considérons la suite

$$0 \longrightarrow 2\mathbb{Z} \xhookrightarrow{\iota} \mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Où $\iota : 2\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}$ est l'inclusion naturelle et l'homomorphisme $p : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est défini par $p(x) = [x]_2$. L'inclusion est bien définie (cours d'algèbre de 2ème année). On vérifie de la même manière qu'à l'exemple 1) que l'homomorphisme p est bien défini. De plus l'injectivité de ι et la surjectivité de p sont immédiats. Il nous faut montrer à présent que la suite est exacte. Soit $x \in 2\mathbb{Z}$, i.e., $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 2k$. Or $p(x) = p(2k) = [2k]_2 = [0]_2$. Donc $Im(\iota) \subset Ker(p)$. Montrons que $Ker(p) \subset Im(\iota)$. Soit $x \in \mathbb{Z}$ tel que $p(x) = [x]_2 = [0]_2$, i.e., 2 divise x. Donc $\exists m \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 2m$. Il suffit de considérer $2m \in 2\mathbb{Z}$. On a alors, $i(2m) = 2m \in Ker(p)$. Ainsi, $Ker(p) \subset Im(\iota)$. La suite est bien exacte mais n'est pas scindée. En effet, nous avons montré au point b) de l'exercice 4, que la suite est scindée si est seulement si $\mathbb{Z} \cong 2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Considérons l'élément $(0, [1]_2) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Nous avons $(0, [1]_2) + (0, [1]_2) = (0, 0)$, i.e., $2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ a un élément d'ordre 2. Or $\mathbb{Z}$ n'a aucun élément d'ordre 2. Ceci implique donc que $\mathbb{Z} \ncong 2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et donc que la suite n'est pas scindée.