TOPOLOGIE - SÉRIE 24

Exercice 1. Pour un espace topologique X et un espace métrique Y, montrer que la topologie de convergence compacte et la topologie compact ouvert sur $C(X,Y)$ sont les mêmes.

Preuve. Pour l'inclusion "$\supseteq$" soit $f \in S(C,U)$ où $C \subseteq X$ est compact et $U \subseteq Y$ ouvert. Par compacité de fC, le minimum $\varepsilon := \min_{c\in C} d(fc, Y \setminus U) > 0$ existe et $fC \subseteq B(fC,\varepsilon) \subseteq U$; donc

$$f \in B_C(f,\varepsilon) \subseteq S(C,U).$$

Pour l'inclusion "$\subseteq$" soit $B_C(f,\varepsilon) \subseteq X$ comme dans (a) avec $C \subseteq X$ compact, $f \in C(X,Y)$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Considérons maintenant le recouvrement ouvert

$$\bigcup_{x\in C} \left\{ U \subseteq X \;\middle|\; U \text{ ouvert, } x \in U \text{ et } f\bar{U} \subseteq B(fx,\varepsilon/2) \right\}.$$

C'est un recouvrement, car si $x \in C$ on trouve, par continuité de f, un voisinage ouvert U de x tel que $fU \subseteq B(fx,\varepsilon/3)$ et donc

$$f\bar{U} \subseteq \overline{fU} \subseteq \overline{B(fx,\varepsilon/3)} \subseteq \bar{B}(fx,\varepsilon/3) \subseteq B(fx,\varepsilon/2).$$

En utilisant la compacité de C on choisit un sous-recouvrement fini $U_1,\ldots,U_n$ et pour tout i un $x_i \in U_i \cap C$ tel que $f\overline{U_i} \subseteq B(fx_i,\varepsilon/2)$. En notant $C_i := \overline{U_{x_i}} \cap C$ on a défini des compacts avec

$$f \in \bigcap_{i=1}^{n} S(C_i, B(fx_i,\varepsilon/2)) \subseteq B_C(f,\varepsilon).$$

À savoir: Si $g \in \bigcap_i S(C_i, B(fx_i,\varepsilon/2))$ et $x \in C$ on a $x \in C_i$ pour au moins un i; alors $gx \in B(fx_i,\varepsilon/2)$ en en particulier $d(fx,gx) \leqslant d(fx,fx_i) + d(fx_i,gx) < \varepsilon$. Ça montre que $\sup_{x\in C} d(fx,gx) < \varepsilon$ parce que le suprémum est en fait un maximum par compacité de C et continuité de f et g. □

Exercice 2. Soient X, Y des espaces topologiques.

(a) Si $A \subseteq X$ est fermé, alors $C(Y,A) \subseteq C_{\mathrm{co}}(Y,X)$ est fermé aussi.

(b) Pour X de Hausdorff et $Y \neq \varnothing$, l'inclusion par applications constantes

$$\mathrm{const}\colon X \to C_{\mathrm{co}}(Y,X)$$

est un plongement fermé.

Preuve. Ad (a):

$$C(Y,A) = \mathrm{Map}(Y,X) \setminus \left(\bigcup_{y\in Y} S(\{y\}, X \setminus A) \right).$$

Ad (b): L'application $\mathrm{const}\colon X \to \mathrm{Map}(Y,X)$ est continue, soit en observant que $\mathrm{const} = \mathrm{pr}_Y^\sharp$ et en utilisant exercice 4(c), soit par vérification directe: Si $K \subseteq Y$ est compact et $U \subseteq X$ ouvert,

$$\mathrm{const}^{-1} S(K,U) = \{x \in X \mid \mathrm{const}_x y = x \in U \text{ pour tout } y \in K\} = U.$$

Date: 21 mai 2014

L'application est fermée parce que si $A \subseteq X$ est fermé

$$\mathrm{Map}(Y, X) \setminus \mathrm{const} A = \{f \mid fY \not\subseteq A\} \cup \{f \mid \exists y,\, y' \in Y \colon fy \neq fy'\}\,.$$

Clairement, $\{f \mid fY \not\subseteq A\} = \mathrm{Map}(Y, X) \setminus C(Y, A)$ est ouvert par (a) et parce que X est de Hausdorff, on a de plus

$$\{f \mid \exists y,\, y' \in Y \colon fy \neq fy'\} = \bigcup_{y \in Y} \bigcup_{y' \in Y \setminus \{y\}} \bigcup_{\substack{U \subseteq X \\ \text{ouvert}}} \bigcup_{\substack{U' \subseteq X \\ \text{ouvert} \\ U \cap U' = \varnothing}} S(\{y\}, U) \cap S(\{y'\}, U').$$

Exercice 3. Pour deux espaces topologiques X, Y, si $C(X, Y)$ est muni d'une topologie $\mathcal{T}$ telle que l'évaluation

$$\mathrm{ev} \colon C(X, Y) \times X \to Y,\ (f, x) \mapsto fx$$

est continue, montrer que la topologie compact ouvert est plus grossière que $\mathcal{T}$.

Preuve. Il faut montrer que pour $K \subseteq X$ compact et $W \subseteq Y$ ouvert, on a $S(K, W) \in \mathcal{T}$. Pour ça, il suffit de fixer $f \in S(K, W)$ et construir $U \in \mathcal{T}$ avec $f \in U \subseteq S(K, W)$. Par la continuité de ev par rapport à $\mathcal{T}$, on sait que pour tout $k \in K$, on trouve un voisinage ouvert $U \in \mathcal{T}$ de f et un voisinage ouvert $V \subseteq X$ de k tels que $\mathrm{ev}(U, V) \subseteq W$. En définissant

$$\mathcal{W} := \{U \times V \mid U \in \mathcal{T} \text{ avec } f \in U,\ V \subseteq X \text{ ouvert et } \mathrm{ev}(U, V) \subseteq W\}\,,$$

les $\mathrm{pr}_2\, \mathcal{W} = \{V \subseteq X \mid \exists U \in \mathcal{T} \colon U \times V \in \mathcal{W}\}$ forment un recouvrement ouvert de K et par compacité, on choisit un sous-recouvrement fini $V_1, \ldots, V_n$ aussi que $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{T}$ avec $U_i \times V_i \in \mathcal{W}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. Maintenant, on pose $U := U_1 \cap \ldots \cap U_n \in \mathcal{T}$, ce qui satisfait $f \in U$ et $U \subseteq S(K, W)$: Pour tout $k \in K$, on y trouve $i \in \{1, \ldots, n\}$ avec $k \in V_i$ et donc $\mathrm{ev}(U, k) \subseteq \mathrm{ev}(U_i, V_i) \subseteq W$. □

Exercice 4.

(a) Soient X, Y, Z trois ensembles. Comprendre "l'adjonction exponentielle" (i.e. montrer que c'est une bijection bien-définie)

$$Z^{X \times Y} \cong (Z^Y)^X,\ f \mapsto f^\sharp,\ g^\flat \leftarrow\!\shortmid g \quad \text{où} \quad (f^\sharp x)y := f(x, y) \quad \text{et} \quad g^\flat(x, y) := (gx)y$$

pour $f \colon X \times Y \to Z$, $g \colon X \to Z^Y$, $x \in X$, $y \in Y$, $z \in Z$.

(b) Soient X, Y, Z des espaces topologiques avec Y localement compact. Montrer que la composition

$$C_{\mathrm{co}}(Y, Z) \times C_{\mathrm{co}}(X, Y) \to C_{\mathrm{co}}(X, Z),\ (g, f) \mapsto g \circ f$$

est continue et conclure que l'évaluation $\mathrm{ev} \colon C_{\mathrm{co}}(Y, Z) \times Y \to Z$, $(g, y) \mapsto gy$ l'est aussi.

(c) Pour trois espaces topologiques X, Y, Z avec X et Y localement compact, montrer que l'adjonction exponentielle

$$C(X \times Y, Z) \cong C(X, C_{\mathrm{co}}(Y, Z))$$

du cours est en fait même un homéomorphisme

$$C_{\mathrm{co}}(X \times Y, Z) \cong C_{\mathrm{co}}(X, C_{\mathrm{co}}(Y, Z)).$$

Preuve. *Ad (a):* Pour $f\colon X\times Y\to Z$ on calcule

$$(f^\sharp)^\flat(x,y)=(f^\sharp x)y=f(x,y)\qquad\text{pour tous } x\in X \text{ et } y\in Y.$$

Par contre, pour $g\colon X\to Z^Y$ on a

$$((g^\flat)^\sharp x)y=g^\flat(x,y)=(gx)y\qquad\text{pour tous } x\in X \text{ et } y\in Y.$$

Ad (b): Supposons que $g\circ f\in S(K,U)$, pour $f\colon X\to Y$ et $g\colon Y\to Z$ des applications continues. On va montrer qe'il existe un compact C de Y tel que $f(K)\subseteq C^\circ$ et $g(C)\subseteq U$. Il decoule alors que $(f,g)\in S(K,C^\circ)\circ S(C,U)\subseteq S(K,U)$.

Comme $f(K)\subseteq g^{-1}(U)$, et Y est localement compact, pour tout $k\in K$ il existe un voisinage compact C de $f(k)$ tel que

$$f(k)\in C^\circ\subseteq C\subseteq g^{-1}(U)\subseteq Y.$$

Maintenant, l'image $f(K)$ est compacte, et donc les intérieurs d'un nombre fini de telles compactes C sont suffisants pour le recouvrir. Si on les note $C_1,\dots,C_k$, on a

$$f(K)\subseteq C_1^\circ\cup\dots C_k^\circ\subseteq(C_1\cup\dots\cup C_k)^\circ\subseteq C_1\cup\dots\cup C_k\subset g^{-1}(U)\subseteq Y.$$

La réunion $C_1\cup\dots\cup C_k$ est le compact voulu.
Ad (c): Montrons que l'application

$$\alpha:=(-)^\sharp:C_{\mathrm{co}}(X\times Y,Z)\to C_{\mathrm{co}}(X,C_{\mathrm{co}}(Y,Z)).$$

est continue. On peut utiliser deux fois la loi exponentielle, et on obtient les applications

$$\alpha^\flat:X\times C_{\mathrm{co}}(X\times Y,Z)\to C_{\mathrm{co}}(Y,Z).$$

$$(\alpha^\flat)^\flat:X\times Y\times C_{\mathrm{co}}(X\times Y,Z)\to Z.$$

C'est facile à voir que $(\alpha^\flat)^\flat$ est l'evaluation

$$\mathrm{ev}:X\times Y\times C_{\mathrm{co}}(X\times Y,Z)\to Z,$$

ce qui est continue, lorsque $X\times Y$ est un produit d'espaces localement compacts. Donc $\alpha^\flat$ et α le sont aussi.

Montrons que l'application

$$(-)^\flat:=\beta:C_{\mathrm{co}}(X,C_{\mathrm{co}}(Y,Z))\to C_{\mathrm{co}}(X\times Y,Z).$$

est continue. On peut utiliser deux fois la loi exponentielle, et on obtient les applications

$$\beta^\flat:X\times Y\times C_{\mathrm{co}}(X,C_{\mathrm{co}}(Y,Z))\to Z.$$

$$(\beta^\flat)^\sharp:X\times C_{\mathrm{co}}(X,C_{\mathrm{co}}(Y,Z))\to C_{\mathrm{co}}(Y,Z).$$

C'est facile à voir que $(\beta^\flat)^\sharp$ est l'evaluation

$$\mathrm{ev}:X\times C_{\mathrm{co}}(X,C_{\mathrm{co}}(Y,Z))\to C_{\mathrm{co}}(Y,Z),$$

ce qui est continue, lorsque X est un espace localement compact. Donc $\beta^\flat$ et β le sont aussi.