TOPOLOGIE - SÉRIE 23

Pour cette série, on fixe deux espaces topologiques X, Y et on va considérer les topologies suivantes sur l'ensemble Y^X d'applications (pas forcément continues) $X \to Y$:

- $\mathcal{T}_{\text{po}}$ - la topologie point-ouvert (i.e. la topologie produit);
- $\mathcal{T}_{\text{cc}}$ - la topologie de convergence compacte pour Y métrique;
- $\mathcal{T}_{\text{unif}}$ - la topologie uniforme pour Y métrique.

Exercice 1. Rappelons que l'on a toujours $\mathcal{T}_{\text{po}} \subseteq \mathcal{T}_{\text{cc}}$ et aussi $\mathcal{T}_{\text{cc}} \subseteq \mathcal{T}_{\text{unif}}$ pour Y métrique. Dans certains cas, ces inclusions deviennent des égalités. Montrer que

(a) si X est discret, alors $\mathcal{T}_{\text{po}} = \mathcal{T}_{\text{cc}}$;

(b) si X est compact, alors $\mathcal{T}_{\text{cc}} = \mathcal{T}_{\text{unif}}$.

Preuve. Ad (a): Soit $B_C(f, \varepsilon) = \left\{ g \in Y^X \;\middle|\; \sup_{x \in C} d(fx, gx) < \varepsilon \right\}$ un ouvert de base pour $\mathcal{T}_{\text{cc}}$, où $C \subseteq X$ est compact, $f \in Y^X$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Par compacité, $C = \{x_1, \ldots, x_n\}$ est fini et

$$B_C(f, \varepsilon) = \bigcap_{i=1}^{n} B_{\{x_i\}}(f, \varepsilon) = \bigcap_{i=1}^{n} S(x_i, B(fx_i, \varepsilon)) \in \mathcal{T}_{\text{po}} \qquad \text{où}$$

$$S(x_i, B(fx_i, \varepsilon)) = \left\{ g \in Y^X \;\middle|\; gx_i \in B(fx_i, \varepsilon) \right\} = \left\{ g \in Y^X \;\middle|\; d(fx_i, gx_i) < \varepsilon \right\}$$

est un ouvert de sous-base pour $\mathcal{T}_{\text{po}}$.
Ad (b): Soit $B(f, \varepsilon) = \left\{ g \in Y^X \;\middle|\; \sup_{x \in X} \bar{d}(fx, gx) < \varepsilon \right\}$ un ouvert de base pour $\mathcal{T}_{\text{unif}}$, où $f \in Y^X$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Si $\varepsilon > 1$ alors $B(f, \varepsilon) = Y^X$ par définition de $\bar{d}$; donc il suffit de considérer le cas $\varepsilon \in]0, 1]$ où on peut remplacer $\bar{d}$ par d. Mais là, $B(f, \varepsilon) = B_X(f, \varepsilon) \in \mathcal{T}_{\text{cc}}$. □

Exercice 2. Si Y est un espace métrique complet, montrer que Y^X avec la topologie uniforme l'est aussi.

Preuve. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans Y^X par rapport à $\mathcal{T}_{\text{unif}}$. En prenant $1 > \varepsilon > 0$ on a un indice N tel que pour tous m, $n > N$

$$\varepsilon > \overline{\rho}(f_m, f_n) = \sup \{ d(f_m(x), f_n(x)) \mid x \in X \} > d(f_m(x), f_n(x)).$$

Mais alors, pour tout $x \in X$ la suite $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans l'espace métrique complet Y. Soit $f(x)$ sa limite dans Y. Donc on a une application bien definie $f\colon X \to Y$, et on va prouver qu'elle est la limite de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
Soit $\varepsilon > 0$, et N tel que pour tous m, $n > N$ on a $\overline{\rho}(f_m, f_n) < \varepsilon/2$. Alors pour $x \in X$ et $n > N$ on a que

$$d(f(x), f_n(x)) = d\Big(\lim_{m \to \infty} f_m(x), f_n(x) \Big) = \lim_{m \to \infty} d(f_m(x), f_n(x)) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Finalement, en prenant le suprémum

$$\overline{\rho}(f, f_n) = \sup \{ d(f(x), f_n(x)) \mid x \in X \} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

et donc $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers f. □

Date: 24 avril 2014

Exercice 3. Montrer que

(a) $B(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est fermé par rapport à $\mathcal{T}_{\text{unif}}$ mais pas pour $\mathcal{T}_{\text{cc}}$;

(b) $C(I,\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^{I}$ est fermé par rapport à $\mathcal{T}_{\text{unif}}$ mais pas pour $\mathcal{T}_{\text{po}}$.

Preuve. Ad (a): Montrons que $B(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est fermé par rapport à la topologie de la convergence uniforme. Il suffit de voir que la limit uniforme d'une suite d'applications bornées est toujours bornée. Soit alors $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une telle suite qui converge vers f. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $|f(x) - f_n(x)| < 1$ et $|f_n(x)| < M$ pour tout $x \in X$. On a que

$$|f(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x)| < 1 + M,$$

ce qui montre que f est bornée.

Montrons que $B(\mathbb{R},\mathbb{R})$ n'est pas fermé par rapport à la topologie de la convergence compacte. Noter qu'une suite d'applications $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans la topologie de la convergence compacte ssi elle converge uniformement sur tous les compactes. Maintenant, considérons la suite d'applications dans $B(\mathbb{R},\mathbb{R})$ donnée par $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \min\{n, |x|\}$ indicée par $n \in \mathbb{N}_{>0}$, qui converge ponctuellement vers $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$. Si la suite convergeait dans la topologie de la convergence compacte, il faudrait que la limite soit la même. Mais la fonction module n'est pas borné, et donc la suite ne converge pas dans $B(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Ad (b): On sait déja que la limite uniforme d'une suite d'applications continues est toujours continue. Il découle que $C(I,\mathbb{R})$ est ferm'e par rapport à la topologie uniforme.

Montrons que $C(I,\mathbb{R})$ n'est pas fermé par rapport à la topologie point-ouvert. Noter qu'une suite d'applications $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans la topologie point-ouvert ssi elle converge point par point. Maintenant, considérons la suite d'applications continues $f_n\colon I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$ indicée par $n \in \mathbb{N}_{>0}$, qui converge vers $f\colon I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \delta_{x,1}$ (i.e. $f1 = 1$ et $fx = 0$ pour $x \neq 1$), qui n'est pas continue. $\square$

Exercice 4. (Théorème d'Approximation de Weierstrass) Dans cet exercice, on va analyser l'adhérence de l'ensemble $P(I,\mathbb{R})$ des applications polynomiaux sur I dans $C(I,\mathbb{R})$ par rapport à $\mathcal{T}_{\text{unif}} = \mathcal{T}_{\text{cc}}$. Alors, soit $f \in C(I,\mathbb{R})$ avec $f0 = f1 = 0$, que l'on va considérer comme une fonction sur $\mathbb{R}$ avec $f|_{\mathbb{R}\setminus I} = 0$ (et donc uniformément continue sur $\mathbb{R}$). De plus, posons

$$Q_n(x) := c_n(1-x^2)^n \qquad \text{avec } n \in \mathbb{N}_{>0} \text{ et } c_n \in \mathbb{R}_{>0} \text{ tel que} \qquad \int_{-1}^{1} Q_n(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

Observer que les Q_n sont des fonctions paires (i.e. $Q_n(-x) = Q_n(x)$) et positives. Montrer que

(a) $c_n < \sqrt{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}_{>0}$ (*Indication: Intégrer jusqu'à $1/\sqrt{n}$ et utiliser l'inégalité de Bernoulli*);

(b) $Q_n \to 0$ uniformément sur $[\delta, 1]$ pour tout $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$.

En définissant $P_n(x) := \int_{-1}^{1} f(x+t)Q_n(t)\,\mathrm{d}t$ pour $n \in \mathbb{N}_{>0}$, montrer que

(c) $P_n(x)$ est polynomiale en x (*Indication: Changement de variable $s := x + t$*);

(d) $P_n \to f$ uniformément sur I (*Indication: Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ il y a $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que* $|y - x| < \delta \Rightarrow |fy - fx| < \varepsilon/2$ et que l'on utilise pour subdiviser l'intégrale $P_n(x) - f(x)$ en trois parties $[-1, -\delta]$, $[-\delta, \delta]$ et $[\delta, 1]$).

(e) Généraliser au cas où $f0$ et $f1$ sont arbitraires.

(f) En conclure que $\overline{P(I,\mathbb{R})} = C(I,\mathbb{R})$.

Preuve. Ad (a):

$$
\begin{aligned}
1 = c_n \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n \mathrm{d}x = 2c_n \int_0^1 (1-x^2)^n \mathrm{d}x \geqslant 2c_n \int_0^{1/\sqrt{n}} (1-x^2)^n \mathrm{d}x \\
\overset{\text{Bernoulli}}{\geqslant} 2c_n \int_0^{1/\sqrt{n}} (1-nx^2)\mathrm{d}x = \frac{4c_n}{3\sqrt{n}} > \frac{c_n}{\sqrt{n}}
\end{aligned}
$$

Ad (b): Par (a), on a $Q_n(x) = c_n(1-x^2)^n < \sqrt{n}\,(1-\delta^2)^n$ pour tout $x \in [\delta, 1]$ et donc $Q_n \to 0$ uniformément sur $[\delta, 1]$.

Ad (c): En posant $s := x + t$ (et donc $\mathrm{d}s = \mathrm{d}t$) pour $x \in I$ fixé, on calcule

$$
P_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x+t)Q_n(t)\mathrm{d}t = \int_{-x}^{1-x} f(x+t)Q_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 f(s)Q_n(s-x)\mathrm{d}s,
$$

ce qui est clairement polynomial en x.

Ad (d): Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ et $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que $|y - x| < \delta$ implique $|fy - fx| < \varepsilon/2$, ce qui existe par la continuité uniforme de f. En définissant $M := \max_{x \in I} |fx|$, on calcule

$$
|P_n(x) - f(x)| = \left| P_n(x) - f(x) \int_{-1}^{1} Q_n(t)\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_{-1}^{1} |f(x+t) - f(x)|\, Q_n(t)\mathrm{d}t.
$$

Maintenant, on subdivise $\int_{-1}^{1} |f(x+t) - f(x)|\, Q_n(t)\mathrm{d}t$ en trois parties $[-1, -\delta]$, $[-\delta, \delta]$, $[\delta, 1]$ et on estime

$$
\int_{-\delta}^{\delta} |f(x+t) - f(x)|\, Q_n(t)\mathrm{d}t \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\delta}^{\delta} Q_n(t)\mathrm{d}t \leqslant \frac{\varepsilon}{2},
$$

$$
\int_{-1}^{-\delta} |f(x+t) - f(x)|\, Q_n(t)\mathrm{d}t \leqslant 2M \int_{-1}^{-\delta} Q_n(t)\mathrm{d}t \leqslant 2M\sqrt{n}\,(1-\delta^2)^n,
$$

et de manière analogue $\int_{\delta}^{1} |f(x+t) - f(x)|\, Q_n(t)\mathrm{d}t \leqslant 2M\sqrt{n}\,(1-\delta^2)^n$. Donc

$$
|P_n(x) - f(x)| \leqslant 4M\sqrt{n}\,(1-\delta^2)^n + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon
$$

pour n grand.

Ad (e): En remplace un $f \in C(I, \mathbb{R})$ arbitraire par

$$
g(x) := f(x) - f(0) - x(f(1) - f(0)),
$$

ce qui satisfait $g(0) = g(1) = 0$. Comme ci-dessus on trouve une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales qui converge uniformément vers g et donc $\big(P_n + f(0) + x(f1 - f0)\big)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions polynomiales qui converge uniformément vers f.

Ad (f): Pour tout $f \in C(I, \mathbb{R})$ on a construit une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $P(I, \mathbb{R})$ qui converge uniformément (i.e. par rapport à $\mathcal{T}_{\text{unif}} = \mathcal{T}_{\text{cc}}$) vers f, ce qui veut dire que $\overline{P(I, \mathbb{R})} = C(I, \mathbb{R})$. □