TOPOLOGIE - SÉRIE 19

Exercice 1. Montrer qu'un espace métrique X est compact si et seulement si toute application continue $X \to \mathbb{R}$ est bornée.

Preuve. Si X est compact, alors toute fonction continue $f\colon X \to \mathbb{R}$ est bornée, parce que $fX \subseteq \mathbb{R}$ est compact, donc fermé et borné. Montrons maintenant que si X n'est pas compact, alors nous pouvons construire une fonction continue qui n'est pas bornée. Si X n'est pas compact, il y a une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui n'admet aucune sous-suite convergente. En enlevant des éléments dupliqué (dont il y a seulement un nombre fini) on peut supposer que $x_m \neq x_n$ pour $m \neq n$. Maintenant, $A := \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est fermé parce que $\overline{A}$ est l'ensemble des $x \in X$ qui sont la limite d'une suite dans A. Finalement, nous pouvons définir une fonction $f\colon A \to \mathbb{R}$, par $x_n \mapsto n \in \mathbb{R}$. Elle est continue parce que A est discret. Par Tietze, on peut étendre f en une fonction $X \to \mathbb{R}$ qui n'est pas bornée. □

Exercice 2. Le but de cet exercice est de montrer que si un espace compact de Hausdorff X s'écrit comme une réunion $X = A \cup B$ avec A, $B \subseteq X$ fermé et métrisable, alors X est aussi métrisable.

(a) Montrer que X est métrisable si et seulement s'il admet une base dénombrable.

(b) Traiter le cas où $A \cap B = \varnothing$.

(c) Traiter le cas où $A \cap B \neq \varnothing$.

Preuve. Ad (a): Si X est métrisable et $q \in \mathbb{Q}_{>0}$, les boules $B(x,q)$ avec $x \in X$ forment un recouvrement ouvert de X, qui a donc un sous-recouvrement fini $\mathcal{B}_q$. En utilisant l'axiome du choix, on choisit pour tous $q \in \mathbb{Q}_{>0}$ un tel $\mathcal{B}_q$ et alors $\mathcal{B} := \bigcup_{q\in\mathbb{Q}_{>0}} \mathcal{B}_q$ est une base dénombrable pour X. Réciproquement, si X a une base dénombrable, on peut appliquer le théorème d'Urysohn parce que tout espace compact de Hausdorff est régulier.
Ad (b): Noter d'abord que A, B, étant deux sous-espaces fermés de X, sont compacts et donc par (a) possèdent deux bases dénombrables $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. Mais maintenant, vu que A et B sont disjoints, ils sont aussi ouverts et donc $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ est une base dénombrable de X, ce qui montre (encore une fois par (a)) que X est métrisable.
Ad (c): Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux bases dénombrables de A et B. Pour $U \in \mathcal{A}$ on note que

$$U' := U \cup (X \setminus A) \qquad \text{et} \qquad U \setminus B$$

sont ouverts dans X (en fait, U' est le plus grand ouvert de X avec $A \cap U' = U$). De façon similaire, pour $V \in \mathcal{B}$

$$V'' := V \cup (X \setminus B) \qquad \text{et} \qquad V \setminus A$$

sont ouverts dans X. Pour prouver l'énoncé, montrons que $\mathcal{C}$, la réunion des

$$U' \cap V'',\ U \setminus B,\ V \setminus A \qquad \text{avec} \qquad U \in \mathcal{A},\ V \in \mathcal{B}$$

est une base pour X. Alors, soit $W \subseteq X$ ouvert et $x \in W$. Si $x \in A$ mais $x \notin B$ on trouve $U \in \mathcal{A}$ tel que $x \in U \subseteq W \cap A$. Donc $x \in U \setminus B \subseteq W$ et $U \setminus B \in \mathcal{C}$. Similairement pour $x \in X \setminus A$. Finalement, si $x \in A \cap B$, on a $U \in \mathcal{A}$, $V \in \mathcal{B}$ avec $x \in U \subseteq W \cap A$, $x \in V \subseteq W \cap B$ et donc

$$x \in U' \cap V'' = (U \cap V) \cup (U \setminus B) \cup (V \setminus A) \subseteq W.$$

□

Date: 9 avril 2014

Définition. Un espace topologique X est *localement compact* ssi pour chaque point $x \in X$ et chaque voisinage ouvert U de x, il existe un compact $K \subseteq X$ tel que $x \in \mathring{K} \subseteq K \subseteq U$. C'est à dire, les voisinages compacts engendre le filtre $\mathcal{N}(x)$.

Exercice 3. Montrer qu'un espace localement compact de Hausdorff est

(a) régulier.

(b) complètement régulier.
Indication: Utiliser le lemme de recollement.

Preuve.

(a) Comme X est d'Hausdorff, les singletons sont fermés. Pour voir qu'il est régulier, on utilise la caractérisation, et on considère un point $x \in X$ et un ouvert $U \ni x$. Comme X est localement compacte, il existe un compacte $K \subseteq U$ tel que $x \in F^\circ \subseteq K \subseteq X$. On note que K est un compact dans un espace de Hausdorff, et il est donc fermé. Il decoule que $\overline{K^\circ} \subseteq K$. Si finalement on pose $V := K^\circ$, on obtient

$$x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq K \subseteq U,$$

ce qui montre que X est régulier.

(b) Pour voir diréctement que X est complétement régulier, on prend un point x et un fermé F qui ne le contient pas. En posant $U := X \setminus F$, de l'hypothèse on trouve un compact K tel que $x \in K^\circ \subseteq K \subseteq U = X \setminus F$. Comme K est compact et de Hausdorff, il est normal. Alors on peut séparer x et le fermé $K \setminus K^\circ$ par un fonction continue $f : K \to \mathbb{R}$ telle que $f = 0$ sur $K \setminus K^\circ$, et $f(x) = 1$. Par le Lemme de recollement, on peut récoller f avec la fonction qui vale constantement 0 sur le fermé $X \setminus K^\circ$, en obtenant une fonction g qui est 0 sur $X \setminus K^\circ \supseteq X \setminus U = F$, et 1 sur x. □

Exercice 4. Pour un espace compact de Hausdorff X on dénote $C(X, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues $X \to \mathbb{R}$, qui possède naturellement la structure d'un anneau en sommant et multipliant les fonctions valeur par valeur:

$$(f+g)x := fx + gx, \qquad (fg)x := (fx)(gx)$$

pour $f,\ g \in C(X, \mathbb{R})$, $x \in X$. Soit $X' := \operatorname{Max} C(X, \mathbb{R})$ l'ensemble des idéaux maximaux de $C(X, \mathbb{R})$ et pour $f \in C(X, \mathbb{R})$

$$U_f := \{x \in X \mid fx \neq 0\}, \qquad U'_f := \{\mathfrak{m} \in X' \mid f \notin \mathfrak{m}\}.$$

On va montrer que l'on peut reconstruire X de $C(X, \mathbb{R})$ en montrant que

(a) les U_f forment une base pour la topologie de X et les U'_f forment une base de topologie sur X' (et on regarde X' comme un espace topologique muni de cette topologie);

(b) l'application

$$\varphi : X \to X',\ x \mapsto \mathfrak{m}_x := \{f \in C(X, \mathbb{R}) \mid fx = 0\}$$

est bien-défini (i.e. $\mathfrak{m}_x$ est un idéal maximal) et continue;
Indication: Considérer $\mathrm{ev}_x : C(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.

(c) l'application φ est bijectif.
Indication: Pour la surjectivité, montrer que pour $\mathfrak{m} \in X'$

$$V(\mathfrak{m}) := \{x \in X \mid fx = 0 \text{ pour toutes } f \in \mathfrak{m}\} \neq \varnothing.$$

(d) l'application φ est ouverte.

Preuve. Ad (a): En écrivant $A_f := X \setminus U_f = \{x \in X \mid fx = 0\}$. Parce que X est complètement régulier, on trouve pour tout fermé $A \subseteq X$ et tout $x \notin A$ une application $f\colon X \to \mathbb{R}$ avec $fA \subseteq \{0\}$ et $fx \neq 0$. On conclut que

$$A = \bigcap_{\substack{f \in C(X,\mathbb{R}) \\ A \subseteq A_f}} A_f$$

et donc les U_f forment une base pour la topologie de X. Maintenant, si f, $g \in C(X, \mathbb{R})$, alors $U'_f \cap U'_g = U'_{fg}$ (parce qu'un idéal maximal est premier) et donc $\{U'_f \mid f \in C(X,\mathbb{R})\}$ est une base de topologie.
Ad (b): L'évaluation $\mathrm{ev}_x\colon C(X,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est un morphisme d'anneaux, surjectif et $\operatorname{Ker} \mathrm{ev}_x = \mathfrak{m}_x$. Donc $\mathbb{R} \cong C(X,\mathbb{R})/\mathfrak{m}_x$, ce qui montre que $\mathfrak{m}_x$ est maximal parce que $\mathbb{R}$ est un corps. L'application φ est continue parce que pour $f \in C(X,\mathbb{R})$

$$\varphi^{-1}U'_f = \left\{x \in X \;\middle|\; \mathfrak{m}_x \in U'_f\right\} = \{x \in X \mid f \notin \mathfrak{m}_x\} = \{x \in X \mid fx \neq 0\} = U_f.$$

Ad (c): L'application φ est injectif parce que X est "complètement de Hausdorff" dans le sens que pour tout x, $y \in X$ distincts, il existe $f\colon X \to \mathbb{R}$ avec $fx = 0$ et $fy \neq 0$. Ça veut dire $f \in \mathfrak{m}_x$ mais $f \notin \mathfrak{m}_y$ et donc $\mathfrak{m}_x \neq \mathfrak{m}_y$. Pour la surjectivité, on va montrer que pour $\mathfrak{m} \in X'$ on trouve

$$x \in V(\mathfrak{m}) := \{x \in X \mid fx = 0 \text{ pour toutes } f \in \mathfrak{m}\} = \{x \in X \mid \mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}_x\},$$

ce qui implique que $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}_x$ et donc $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_x$ par la maximalité de $\mathfrak{m}$. Par absurde, supposons que $V(\mathfrak{m}) = \varnothing$, i.e. que pour tout $x \in X$ il existe $f \in \mathfrak{m}$ avec $fx \neq 0$. Par la continuité de f, ça implique qu'il existe même $U \ni x$ ouvert avec $0 \notin fU$. Donc

$$\mathcal{U} := \{U \subseteq X \text{ ouvert} \mid \text{il existe } f \in \mathfrak{m} \text{ telle que } fx \neq 0 \text{ pour tout } x \in U\}$$

est un recouvrement ouvert de X et on choisit un sous-recouvrement fini $U_1, \ldots, U_n$ et $f_1, \ldots, f_n$ tels que $f_i x \neq 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $x \in U_i$. Maintenant $f := f_1^2 + \ldots + f_n^2 \in \mathfrak{m}$ et $fx \neq 0$ pour tout $x \in X$. Mais ça veut dire que $f \in C(X,\mathbb{R})$ est inversible et donc $\mathfrak{m} = C(X,\mathbb{R})$, ce qui contredit la maximalité de $\mathfrak{m}$.
Ad (d): On a déjà vu que $U_f = \varphi^{-1}U'_f$ et donc par la surjectivité de φ

$$\varphi U_f = \varphi\varphi^{-1}U'_f = U'_f.$$

□