TOPOLOGIE - SÉRIE 9

Exercice 1. Soit (Y,d) un espace métrique et X un ensemble. Montrer qu'une famille d'applications $(f_n\colon X \to Y)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une application $f\colon X \to Y$ si et seulement si elle converge vers f dans $\left(\prod_{x\in X} Y, \mathcal{T}_{\bar\rho}\right)$ où $\bar\rho$ est la métrique uniforme.

Preuve. $[\Longrightarrow]$; Supposons qu'on a une famille d'applications $(f_n\colon X \to Y)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers une application $f\colon X \to Y$. Soit $B(f,\varepsilon)$ une boule dans $\left(\prod_{x\in X} Y, \mathcal{T}_{\bar\rho}\right)$, et $N \in \mathbb{N}$ tel que $d_Y(f_n, f) < \frac{\varepsilon}{2}$ lorsque $n > N$. Alors pour tou $n > N$ on a que

$$\bar\rho(f_n, f) = \sup_{x\in X} d_Y(f_n(x), f(x)) \le \frac{\varepsilon}{2} \le \varepsilon,$$

ce qui veut dire que la suite est définitevement dans la boule, et donc elle converge vers f dans la topologie induite par la métrique.
$[\Longleftarrow]$; Supposons qu'on a une famille d'applications $(f_n\colon X \to Y)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers f dans $\left(\prod_{x\in X} Y, \mathcal{T}_{\bar\rho}\right)$. Soit $\varepsilon > 0$; comme la suite converge vers f, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que $f_n \in B(f,\varepsilon)$ lorsque $n > N$. En particulier, pour $n > N$ et $x \in X$ on a

$$d_Y(f_n(x), f(x)) \le \sup_{x\in X} d_Y(f_n(x), f(x)) = \bar\rho(f_n, f) < \varepsilon.$$

Donc la suite converge uniformement vers f. □

Exercice 2. Trouver deux espaces topologiques $(X,\mathcal{T})$, $(Y,\mathcal{T}')$ et une application non continue $f\colon X \to Y$ tels que pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans X convergente vers un $x \in X$, la suite $(fx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers fx.

Solution. Soit X un ensemble. On le munit de la topologie dite codénombrable $\mathcal{T}_{coden}$, qui est définie par $U \in \mathcal{T}_{coden}$ si U est vide ou bien si son complémentaire est fini ou dénombrable. Soit $U_i, i \in I$ une famille d'éléments de $\mathcal{T}_{coden}$. Alors $X \setminus \left(\bigcup_{i\in I} U_i\right) = \bigcap_{i\in I} X \setminus U_i$ a un cardinal plus petit que celui de n'importe lequel des $X \setminus U_i$, il est donc bien au plus dénombrable.

Si $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{T}_{coden}$ alors $X \setminus \bigcap_{k=1}^n U_k = \bigcup_{i=1}^n X \setminus U_k$ qui est dénombrable car une union finie d'ensemble dénombrables est dénombrable.

La topologie codénombrable est donc bien une topologie.

On munit $\mathbb{R}$ de la topologie codénombrable, et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente vers x pour cette topologie. On considère l'ensemble $U = (\mathbb{R} \setminus \{x_n : n \in \mathbb{N}\}) \cup \{x\}$ dont le complémentaire est au plus dénombrable, car inclus dans l'image de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Par hypothèse, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in U$ pour tout $n > N$. Ceci veut dire que $x_n = x$ pour tout $n > N$.

Par ailleurs, les suites constantes à partir d'un certain rang sont toujours convergentes vers cette valeur. (Dans n'importe quel espace topologique).

La fonction identité $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{coden}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{disc})$ n'est pas continue car le complémentaire d'un point est indénombrable, et pourtant la propriét recherchée est trivialement vérifiée. □

Exercice 3. Montrer que

(a) "être de Hausdorff" et "être métrisable" sont des propriétés topologiques;

(b) une application $f\colon (X,\mathcal{T}) \to (Y,\mathcal{T}')$ entre deux espaces topologiques est un homéomorphisme si et seulement si elle est continue, bijective et fermée (i.e. l'image d'un fermé par f est fermé);

Date: 26 novembre 2013

(c) si $(f_i\colon (X_i, \mathcal{T}_i) \cong (X_i', \mathcal{T}_i'))_{i\in I}$ est une famille d'homéomorphismes alors

$$\left(\prod_{i\in I} X_i, \underset{i\in I}{*} \mathcal{T}_i\right) \cong \left(\prod_{i\in I} X_i', \underset{i\in I}{*} \mathcal{T}_i'\right).$$

Preuve.

(a) Supposons qu'on a un homéomorphisms $f : X \longrightarrow Y$.

- Si Y est d'Hausdorff, X l'est aussi, puisque f est injective et continue (Exercise 1a, Série 7).
- On va montrer que si Y est métrisable avec une metrique d_Y, alors X est métrisable aussi. On definit

  $$d_X : X \times X \longrightarrow [0, +\infty) \text{ par } d_X(x, x') := d_Y(f(x), f(x')).$$

  En effet d_X est bien une métrique, puisque f est injective et d_Y est une métrique. Ensuite, elle induit la topologie de X, i.e. $\mathcal{T}_X = \mathcal{T}_{d_X}$.

  — $[\mathcal{T}_X \subseteq \mathcal{T}_{d_X}]$; Soit $U \in \mathcal{T}_X$, et $x \in U$. Comme f est ouverte $f(U)$ est ouvert dans $\mathcal{T}_Y = \mathcal{T}_{d_Y}$. Alors on trouve une boule $B_Y(f(x), \varepsilon)$ qui est entierement contenue dans $f(U)$, et ensuite $B_X(x, \varepsilon)$ est contenue dans U. Donc U est ouvert dans la topologie induite par la métrique.

  — $[\mathcal{T}_X \supseteq \mathcal{T}_{d_X}]$; Soit $B_X(x, \varepsilon)$ une boule dans X. On peut l'écrir comme

  $$B_X(x, \varepsilon) = f^{-1}(B_Y(f(x), \varepsilon)),$$

  ce qui est ouvert puisque f est continue et les boules sont ouvertes dans Y.

(b) On rappelle que un homéomorphisme est un application continue bijective et ouverte.

- Soit $f : X \longrightarrow Y$ un homéomorphisme. On va montrer que f est fermée. Soit $F = X \setminus U$ un fermé de X. Alors $f(F) = f(X \setminus U) = f(X) \setminus f(U) = Y \setminus f(U)$, ce qui est fermée puisque U est ouvert et f est ouverte.
- Soit $f : X \longrightarrow Y$ continue bijective et fermé. On va montrer que f est ouverte. Soit $U = X \setminus F$ un ouvert de X. Alors $f(U) = f(X \setminus F) = f(X) \setminus f(F) = Y \setminus f(F)$, ce qui est ouvert puisque F est fermé et f est fermée.

(c) Soit $f_i : X_i \longrightarrow X_i'$ est l'homéomorphisme qui est donné pour tout $i \in I$, et f_i' son inverse. On denote p_i les projections de $\prod_{i\in I} X_i$ et p_i' celles de $\prod_{i\in I} X_i$. On va définir deux functions continues $f : \prod_{i\in I} X_i \longrightarrow \prod_{i\in I} X_i'$ et $f : \prod_{i\in I} X_i' \longrightarrow \prod_{i\in I} X_i$ qui sont inverses l'une pour l'autre.

Soient $f((x_i)_{i\in I}) := (f_i(x_i))_{i\in I}$ et $f'((x_i')_{i\in I}) := (f_i'(x_i'))_{i\in I}$. On a que f et f' sont inverses l'une pour l'autre. Ensuite f est continue, parce que pour tout $i \in I$ on a $p_i' \circ f = f_i \circ p_i$, ce qui est continue. De facon similaire f' est continue aussi. □

Exercice 4. Considérons les groupes

$$\mathrm{SO}_n := \left\{ A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2} \;\middle|\; AA^t = E \text{ et } \det A = 1 \right\}$$

$$\mathrm{SU}_n := \left\{ A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n^2} \;\middle|\; AA^* = E \text{ et } \det A = 1 \right\}$$

comme sous espaces de $(\mathbb{R}^{n^2}, \mathcal{T}_{\mathrm{st}})$ et $(\mathbb{C}^{n^2}, \mathcal{T}_{\mathrm{st}})$.

(a) Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est un *groupe topologique*, ce qui veut dire que la multiplication des matrices et prendre l'inverse sont des applications continues

$$\mu\colon \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \qquad \iota\colon \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}).$$

(b) En conclure que SO_n et SU_n sont aussi des groupes topologiques (en fait des sous groupes topologiques de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$).

(c) Montrer que $\mathrm{SO}_2 \cong S^1$ comme groupes topologiques, ce qui veut dire qu'il existe un isomorphisme de groupes $\mathrm{SO}_2 \cong S^1$ qui est aussi un homéomorphisme.

(d) Montrer que SU_2 est homéomorphe à S^3.

Preuve.

(a) On rappelle que les applications $+, \cdot : \mathbb{C}\times\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ et $(-)^{-1} : \mathbb{C}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ sont continues. On peut par exemple utiliser la caractésrisation de la continuité par les suites, puisque les espaces sont métrisables, et utiliser les résultats d'analyse sur la convergence d'une somme et d'un produit de suites, ou utiliser directement ε, δ.

On considère $\pi_{ij} : \mathbb{C}^{n^2} \longrightarrow \mathbb{C}$ l'application qui associe a une matrice M sa composante M_{ij}. Par un théorème du cours, la multiplication de matrices $\mu : \mathbb{C}^{n^2} \times \mathbb{C}^{n^2} \longrightarrow \mathbb{C}^{n^2}$, $C(M, M') = MM'$ est continue si et seulement si $\pi_{ij}\mu$ est continue. Or

$$\pi_{ij}\mu(M, M') = \sum_{k=1}^{n} M_{ik} \cdot M'_{kj},$$

□

donc $\pi_{ij}\mu(M, M')$ est continue comme composition d'applications continues (sommes, produits et projections), et donc μ est continue.

Par consequent, $\mu\colon \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\times\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est continue comme application obtenue par restriction du domaine et du codomaine d'une application continue.

Comme précédemment, $\det : \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ est continue comme composition d'applications continues (sommes, produits et projections). Pour l'inversion, on rappelle la formule de Laplace, qui dit que $\pi_{ij}\iota(M) = \frac{\mathrm{Cof}_{ji}(M)}{\det M}$, où $\mathrm{Cof}_{ij}(M) = (-1)^{i+j} \det A^{ij}(M)$ et $A^{ij} : \mathbb{C}^{n^2} \longrightarrow \mathbb{C}^{(n-1)^2}$ est l'application qui supprime la ième ligne et la jème colonne. Cette formule montre que $\pi_{ij}\iota$ peut-être obtenue comme composition d'applications continues. Par conséquent, $\iota\colon \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est continue.

(b) Il suffit de remarquer que SO_n et SU_n sont des sous groupes, ceci découle de propriété uniquement algébriques. Il faut utiliser le fait que $\det A \cdot \det B = \det AB$ et que $(AB)^* = B^*A^*$ pour la multiplication, et que $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$, et que $A^* = A^{-1}$ pour l'inverse. La multiplication et l'inversion sont alors des applications continues comme applications obtenues par restriction du domaine et du codomaine de μ et ι.

(c) On définit une application $f : \mathrm{SO}(2) \longrightarrow S^1 \subseteq \mathbb{C}$ par $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a+ib$ et $g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ par $g(a+ib) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, qui sont trivialement continues. On remarque que $g(S^1) \subseteq \mathrm{SO}(2)$, on obtient donc bien $\bar{g} : S^1 \longrightarrow \mathrm{SO}(2)$ continue comme restriction.

Par ailleurs, si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\bar{g}f(A) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$. Or $A \in \mathrm{SO}(2)$ implique que $c^2 + d^2 = 1$, $ac + bd = 0$ et $ad - bc = 1$. En en multipliant par d la 2ème equation et en y substituant la dernière equation, on obtient que $(1+bc)c+bd^2=0$, ce qui veut dire $c+b(c^2+d^2)=0$, et donc avec la première equation on obtient que $c=-b$. Avec la même démarche mais en multipliant par c la 2ème equation, on obtient que $a=d$ et donc $\bar{g}f=\mathrm{id}_{\mathrm{SO}(2)}$. Le fait que $f\bar{g}=\mathrm{id}_{S^1}$ est trivial.

Par conséquent, $\bar{g}$ est un homémorphisme. Il faut maintenant montrer que c'est un homomorphisme de groupe. Ce calcul facile est laissé au lecteur.

(d) On remarque que $S^3 \cong \{(x,y)\in\mathbb{C}^2 : |x|^2+|y|^2=1\} \subseteq \mathbb{C}^2$, et on procède exactement de la même manière, avec pour seule différence que les coefficients sont complexes, et que $g(a,b)=\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a}\end{pmatrix}$.