TOPOLOGIE - SÉRIE 8

Exercice 1. Soit $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques. Montrer que

(a) si les X_i sont de Hausdorff, alors leur produit $(\prod_{i\in I} X_i, *_{i\in I}\mathcal{T}_i)$ est aussi de Hausdorff;
(b) $\overline{\prod_{i\in I} M_i} = \prod_{i\in I} \overline{M_i}$ pour toute famille $(M_i)_{i\in I}$ de sous-ensembles $M_i \subseteq X_i$;
(c) $*_{i\in I}(\mathcal{T}_i)_{Y_i} = (*_{i\in I}\mathcal{T}_i)_{\prod_{i\in I} Y_i}$ pour toute famille $(Y_i)_{i\in I}$ de sous-espaces $Y_i \subseteq X_i$.

Preuve.

(a) Soient x, y deux éléments distincts de $\prod_{i\in I} X_i$. Alors il existe $j \in I$ tel que $x(j) \neq y(j)$. Puisque X_j est de Hausdorff, il existe U, V deux ouverts disjoints de X_j avec $x(j) \in U$ et $y(j) \in V$. On définit les ouverts $W_x = \{z \in \prod_{i\in I} X_i : z(j) \in U\}$ et $W_y = \{z \in \prod_{i\in I} X_i : z(j) \in V\}$ (ils appartiennent à la sous-base de la topologie sur le produit).
Puisque U et V sont disjoints, W_x et W_y sont disjoints et on a que $x \in W_x$ et $y \in W_y$.

(b) Nous allons commencer par montrer que $\prod_{i\in I} \overline{M_i}$ est fermé dans $(\prod_{i\in I} X_i, *_{i\in I}\mathcal{T}_i)$. Soit $x \notin \prod_{i\in I} \overline{M_i}$. Alors il existe $j \in I$ tel que $x(j) \notin \overline{M_j}$, c'est à dire il existe un ouvert U de X_j avec $x(j) \in U$ et $U \subseteq X_j \setminus M_j$. On remarque que l'ouvert de sous-base $\{z \in \prod_{i\in I} X_i : z(j) \in U\}$ contient x et est inclus dans le complémentaire de $\prod_{i\in I} \overline{M_i}$.
Par conséquent, le complémentaire de $\prod_{i\in I} \overline{M_i}$ est ouvert et donc $\prod_{i\in I} \overline{M_i}$ est fermé. Or $\overline{\prod_{i\in I} M_i}$ est le plus petit fermé contenant $\prod_{i\in I} M_i$, et donc $\overline{\prod_{i\in I} M_i} \subseteq \prod_{i\in I} \overline{M_i}$.
Pour l'inclusion inverse, nous allons utiliser la caractérisation de l'adhérence par les bases. Soit $x \in \prod_{i\in I} \overline{M_i}$ et un ouvert de base W de la topologie produit qui contient x. Par définition, W est de la forme

$$W = \left\{ z \in \prod_{i\in I} X_i : z(j_k) \in U_{j_k} \text{ pour } k = 1, \dots n \right\},$$

où $n \in \mathbb{N}$, $j_1, \dots, j_n \in I$ et $x(j_k) \in U_{j_k} \in \mathcal{T}_{j_k}$ pour $k = 1, \dots n$.
Puisque $x \in \prod_{i\in I} \overline{M_i}$, alors pour tout $i \in I$, il existe $y_i \in V_i \cap M_i$, où $V_i = X_i$ si $i \neq j_k$ et $V_{j_k} = U_{j_k}$. On définit y par $y(j) = y_j$ et on remarque que $y \in W \cap \prod_{i\in I} M_i$.
Ceci montre que $\overline{\prod_{i\in I} M_i} \supseteq \prod_{i\in I} \overline{M_i}$.

(c) Nous allons démontrer que si $(X, \mathcal{T})$ admet une base $\mathcal{B}$ et $Y \subseteq X$ alors $\mathcal{B}_Y = \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$ est une base pour la topologie sur Y. Il est clair que tous les éléments de $\mathcal{B}_Y$ sont des ouverts de $(Y, \mathcal{T}_Y)$, et donc $\mathcal{T}_{\mathcal{B}_Y} \subseteq \mathcal{T}_Y$. Par ailleurs, si $W \in \mathcal{T}_Y$, alors il existe un ouvert U de X tel que $W = U \cap Y$.
Alors, piusque $\mathcal{B}$ est une base, il existe des $B_i \in \mathcal{B}, i \in I$ avec $U = \bigcup_{i\in I} B_i$.
On a que $W = (\bigcup_{i\in I} B_i) \cap Y = \bigcup_{i\in I}(B_i \cap Y)$, et donc $\mathcal{T}_{\mathcal{B}_Y} \supseteq \mathcal{T}_Y$.
En appliquant le résultat à $X = \prod_{i\in I} X_i$ et $Y = \prod_{i\in I} Y_i$, on obtient que la topologie $(*_{i\in I}\mathcal{T}_i)_{\prod_{i\in I} Y_i}$ à pour base

$$\begin{aligned}
\mathcal{C} &= \left\{ \left\{ x \in \prod_{i\in I} X_i : x(j_k) \in U_{j_k} \text{ pour } k = 1, \dots n \right\} \cap \prod_{i\in I} Y_i : n \in \mathbb{N}, j_k \in I, U_{j_k} \in \mathcal{T}_{j_k} \right\} \\
&= \left\{ \left\{ x \in \prod_{i\in I} Y_i : x(j_k) \in U_{j_k} \cap Y_{j_k} \text{ pour } k = 1, \dots n \right\} : n \in \mathbb{N}, j_k \in I, U_{j_k} \in \mathcal{T}_{j_k} \right\}
\end{aligned}$$

et l'on remarque que cette base est exactement celle du produit $*_{i\in I}(\mathcal{T}_i)_{Y_i}$ □

Date: 15 novembre 2013

Exercice 2. Pour une famille dénombrable $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ d'espaces topologiques métrisables, montrer que leur produit $(\prod_{i\in I} X_i, *_{i\in I}\mathcal{T}_i)$ est de nouveau métrisable. Trouver un exemple de famille indénombrable, dont le produit n'est plus métrisable.
Indication: Considérer les bases locales d'un point où on appelle base locale d'un point x une base pour le filtre $\mathcal{V}(x)$ des voisinages de x.

Preuve.

- On va montrer que le produit d'une famille dénombrable d'espaces métriques est métrisable. Soit (X_n, d_n) une famille d'éspaces métrique, avec chaque d_n bornée par 1. On définit alors une métrique sur $X := \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ par

$$d_X : X \times X \longrightarrow [0, +\infty),$$

$$d_X((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) := \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|d_n(x_n, y_n)|}{n} \leq 1.$$

  d_X est bien une métrique. Les propriétés de symmétrie et réflexivité sont triviales. Il reste à montrer l'inégalité triangulaire.
  Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans X. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a que

$$\frac{|d_n(x_n, z_n)|}{n} \leq \frac{|d_n(x_n, y_n)|}{n} + \frac{|d_n(y_n, z_n)|}{n} \leq d_X((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) + d_X((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}).$$

  En passant au supremum on a l'inégalité voulue.
  Ensuite, d_X induit la topologie produit.
  - [$\mathcal{T}_{d_X} \ll \mathcal{T}_X$]; soit V un ouvert de base dans la topologie induite par la métrique, et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V$. Il y a une boule ouverte $B_X((x_n)_{n\in N}, \varepsilon)$ qui est contenue dans V. Soit $N > \frac{1}{\varepsilon}$. Si $U := \prod_{n\in\mathbb{N}} U_n$, oú $U_n := B_{X_n}(x_n, \varepsilon)$ pour $n \leq N$ et $U_n = X_n$ pour $n > N$, alors U est ouvert dans la topologie produit et $U \subseteq B_X((x_n)_{n\in N}, \varepsilon)$ En particulier

$$(x_n)_{n\in N} \in U \subseteq B_X((x_n)_{n\in N}, \varepsilon) \subseteq V.$$

    Donc V est ouvert dans la topologie produit.
  - [$\mathcal{T}_X \ll \mathcal{T}_{d_X}$]; soit U un ouvert de base dans la topologie produit, et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in U$. Il y a un ouvert de base U' dans la topologie produit tel que $(x_n)_{n\in N} \in U' \subseteq U$. On peut prendre U' est de la forme $U' = \prod_{n\in\mathbb{N}} U_n$, où $U_n = B_{X_n}(x_n, \varepsilon_n)$ pour un nombre fini de n, et $U_n = X_n$ autrement. Si $\varepsilon := \min_n \frac{\varepsilon_n}{n}$, alors $B_X((x_n)_{n\in N}, \varepsilon) \subseteq U'$. En particulier

$$(x_n)_{n\in N} \in B_X((x_n)_{n\in N}, \varepsilon) \subseteq U' \subseteq U.$$

    Donc U est ouvert dans la topologie induite par la métrique.
- En général le produit d'une famille d'éspaces métriques n'est pas métrisable. Soit $X_r := \{0, 1\}$ muni de la topologie discrète pour tout $r \in \mathbb{R}$. Alors chaque X_r est métrisable, tandis que le produit $X := \prod_{r\in\mathbb{R}} X_r$ ne l'est pas. En effet dans X on ne peut pas caractériser l'adhérence par suites (Exo3, série5).
  Soient $O := (0)_{r\in\mathbb{R}}$, et $A := \{(x_r)_{r\in\mathbb{R}} \in X \mid x_r = 0 \text{ pour un nombre fini de } r\}$. Alors $O \in \overline{A}$. Condidérons une suite $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans A et pour tout $k \in \mathbb{N}$ soit $I_k := \{r \in \mathbb{R} \mid x^k_r = 0\} \subseteq \mathbb{R}$, ce qui est fini. Alors $I := \bigcup_{r\in\mathbb{R}} I_k$ est dénombrable, et donc il existe $z \in \mathbb{R} \setminus I$. Cela signifie que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $x^k_z = 1$. En particulier la suite $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ ne peut pas être définitivement contenue dans l'ouvert $\{(x_r)_{r\in\mathbb{R}} \in X \mid x_z = 0\}$, ce qui est un voisinage de O. Donc aucune suite dans A peut converger vers O. □

Exercice 3.

(a) Montrer que $\mathbb{R}^\omega$ avec la topologie boite (et où $\mathbb{R}$ est muni de la topologie standard) n'est pas métrisable.
Indication: De nouveau, considérer les bases locales.

(b) Trouver un exemple d'une famille $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ d'espaces topologiques et d'une application $f\colon (Y, \mathcal{T}) \to (\prod_{i\in I} X_i, \mathcal{T}_{\text{box}})$ tels que chaque composante $f_i\colon (Y, \mathcal{T}) \to (X_i, \mathcal{T}_i)$ est continue mais f ne l'est pas.

Preuve.

(a) On va montrer que dans $\mathbb{R}^\omega$ avec la topologie boite on ne peut pas caractériser l'adhérence par suites (Exo3, série5).
Soient $O := (0)_{n\in\mathbb{N}}$, et

$$A := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid x_n > 0 \text{ pour tout } n\}.$$

Alors $O \in \overline{A}$. Considérons après une suite $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans A. L'ouvert

$$U := \prod_{n\in\mathbb{N}} (-x_n^n, x_n^n)$$

contient O mais aucun x^k (lorsque $x_k^k \notin (-x_k^k, x_k^k)$). En particulier, aucune suite dans A converge vers O.

(b) Soit $X_n := \{0,1\}$ avec la topologie discrète pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $Y := \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ avec la topologie produit. Alors la fonction identité

$$Y = (\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \star) \longrightarrow \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n = (\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \square)$$

n'est pas continue, puisque la topologie boite est strictement plus fine que la topologie produit. Pourtant les projections sont continues. $\square$

Exercice 4.

(a) Pour une application $f\colon X \to Y$ et un ultrafiltre $\mathcal{F}$ sur X, montrer que $f_*\mathcal{F}$ est un ultrafiltre sur Y.

Soit $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques dont le produit $X := \prod_{i\in I} X_i$ est non-vide, $\mathcal{F}$ un filtre sur $(X, *_{i\in I}\mathcal{T}_i)$ et notons $\mathcal{F}_i := (\mathrm{pr}_i)_*\mathcal{F}$ les images directes de $\mathcal{F}$ par les projections $\mathrm{pr}_i\colon X \to X_i$. Pour chaque point $x = (x_i)_{i\in I} \in X$, montrer que

(b) pour $f\colon Y \twoheadrightarrow Z$ une application surjective et $\mathcal{G}$ un filtre sur Y

$$f_*\mathcal{G} = \{fA \mid A \in \mathcal{G}\}$$

(en particulier $\mathcal{F}_i = \{\mathrm{pr}_i A \mid A \in \mathcal{F}\}$);

(c) $\mathcal{F}$ converge vers x si et seulement si chaque $\mathcal{F}_i$ avec $i \in I$ converge vers x_i.

(d) Trouver un exemple concret de X et une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui n'a pas de point d'accumulation mais où chaque $(\mathrm{pr}_i\, x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $i \in I$ en possède un.

Preuve.

(a) Nous avons montré dans une série précédente que $f_*\mathcal{F} = \{B \subseteq Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{F}\}$. Supposons que $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre et soient $B, B' \subseteq Y$ tels que $B \cup B' \in f_*\mathcal{F}$. Alors $f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B') = f^{-1}(B \cup B') \in \mathcal{F}$ et donc puisque $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre, $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ ou bien $f^{-1}(B') \in \mathcal{F}$, c'est-à-dire $B \in f_*\mathcal{F}$ ou bien $B' \in f_*\mathcal{F}$. Ceci montre que $f_*\mathcal{F}$ est un ultrafiltre.

(b) Supposons $f : Y \longrightarrow Z$ surjective et soit $B \subseteq Z$ tel que $f^{-1}(B) \in \mathcal{G}$, où $\mathcal{G}$ est un filtre sur Y. Alors, par surjectivité de f, on a que $B = ff^{-1}(B)$ et donc $B \in \{f(A) : A \in \mathcal{G}\}$. Reciproquement, $A \subseteq f^{-1}f(A)$ et donc si $A \in \mathcal{G}$, alors $f(A) \in f_*\mathcal{G}$.

(c) Nous avons déja montré que si $f : X \longrightarrow Y$ est continue et que $\mathcal{F} \to x$ alors $f_*\mathcal{F} \to f(x)$. Ceci montre le sens direct. Soit $x \in \prod_{i \in I} X_i$ et $\mathcal{F}$ un filtre sur le produit et supposons maintenant que $\mathcal{F}_i \to \mathrm{pr}_i(x) = x_i$ pour tout $i \in I$. On doit montrer que tout voisinage ouvert de x est un membre de $\mathcal{F}$. Par la propriété des filtres de stabilité par intersection finies et par extension, il suffit de montrer que les ouverts de sous-base contenant x sont des membres de $\mathcal{F}$.

Soit donc un ouvert de sous-base S de la topologie produit qui contient x. Par définition, S est de la forme

$$S = \left\{ z \in \prod_{i \in I} X_i : z_j \in U_j \right\},$$

où $x_j \in U_j$ et U_j est un ouvert de X_j.
Puisque $\mathcal{F}_j \to x_j$, on a que $U_j \in \mathcal{F}_j$ et donc que $S = \mathrm{pr}_j^{-1}(U_j) \in \mathcal{F}$.

(d) Soit $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, où $\mathbb{N}$ est muni de la topologie discrète. On remarque que le produit est lui aussi muni de la topologie discrète. Si $x \in X$ est un point d'accumulation d'une suite x_n à valeur dans X, ou X est un espace discret, si et seulement si $x_n = x$ pour un nombre infini de n.

On considère une bijection $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Clairement, x n'a pas de point d'adhérence lorsque on la voit comme une suite. Par contre, par surjectivité de x, $\mathrm{pr}_1(x)$ et $\mathrm{pr}_2(x)$ admettent tout entier comme un point d'accumulation. □