TOPOLOGIE - SÉRIE 5

Définition. Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est dit T_1 ssi tous les singletons $\{x\} \subseteq X$ sont fermés.

Exercice 1. Montrer qu'un espace fini et T_1 est discret et que tout espace de Hausdorff est T_1.

Preuve. Soit $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un espace topologique qui satisfait l'axiome T_1. Alors pour tous $i = 1, \ldots n$ on a que le singleton $\{x_i\} = \bigcap_{j \neq i} X \setminus \{x_j\}$, ce qui est ouvert. Donc la topologie est discrète.

Soit maintenant X un espace topologique d'Hausdorff. On va montrer qu'il satisfait l'axiome T_1. Soit $x \in X$, et y dans le complementaire $X \setminus \{x\}$. Alors $x \neq y$, et on trouve deux ouverts disjoints U et V tel que $x \in U$, $y \in V$. En particulier $y \in V \subseteq X \setminus U \subseteq X \setminus \{x\}$. □

Exercice 2. Considérer les cinq topologies sur $\mathbb{R}$ de la semaine passée.

(a) Pour chacune des topologies, déterminer l'adhérence de $K := \{1/n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$.

(b) Lesquelles de ces topologies satisfont-elles l'axiome de Hausdorff? Et l'axiome T_1?

Solution.

- On va calculer l'adhérence de K dans chaque cas.
  (a) $\bar{K}^{\mathcal{T}_1} = K \cup \{0\}$; en effet chaque voisinage de 0 doit intersecter K, et pourtant pour tout $x \notin K \cup \{0\}$ on trouve un interval ouvert qui n'intersecte pas K.
  (b) $\bar{K}^{\mathcal{T}_2} = K$; en effet, par définition K est fermé.
  (c) $\bar{K}^{\mathcal{T}_3} = \mathbb{R}$; en effet, l'adhérence de K doit être un fermé infini, donc il est necessairement $\mathbb{R}$.
  (d) $\bar{K}^{\mathcal{T}_4} = K$; lorsque $\mathcal{T}_4$ est plus fine que $\mathcal{T}_2$ et K est fermé dans $\mathcal{T}_2$, il l'est aussi dans $\mathcal{T}_4$.
  (e) $\bar{K}^{\mathcal{T}_5} = [0, +\infty)$; en effet, $[0, +\infty)$ est fermé et il contient K. Donc on a l'inclusion $[\subseteq]$. Pour l'autre, ca suffit de remarquer que pour tout $y \geq 0$ les voisinages contient un interval de la forme d'un ouvert de base, qui doit nécessairement intersecter K.
- On va dire, pour toutes les topologie, s'elles satisfont l'axiome T_1 et/ou sont d'Hausdorff.
  (a) $\mathcal{T}_1$ est d'Hausdorff; en effet la topologie est métrisable.
  (b) $\mathcal{T}_2$ est d'Hausdorff; en effet elle est plus fine que $\mathcal{T}_1$.
  (c) $\mathcal{T}_3$ satisfait l'axiome T_1, mais elle n'est pas d'Hausdorff; en effet, pour tous $x \neq y$ $\mathbb{R} \setminus \{y\}$ est un voisinage de x qui ne contient pas y. Mais l'intersection de deux ouverts n'est jamais vide.
  (d) $\mathcal{T}_2$ est d'Hausdorff; en effet elle est plus fine que $\mathcal{T}_1$.
  (e) $\mathcal{T}_5$ ne satisfait pas l'axiome T_1; en effet, tous voisinage de 1 doit contenir 0. □

Exercice 3. Pour un espace topologique métrisable $(X, \mathcal{T})$ et $M \subseteq X$ montrer que $x \in \overline{M}$ si et seulement si on y trouve une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in M^{\mathbb{N}}$ qui converge vers x (dans X).
Indication: La direction "$\Leftarrow$" est juste dans un espace topologique quelconque (pas forcément métrisable).

Date: 22 octobre 2013

Preuve. Supposons d'abord qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x_n \in M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ qui converge vers x. Par définition, pour tout ouvert U tel que $x \in U$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in U$ pour tout $n > N$. Par conséquent, $x_{N+1} \in U \cap M$ qui est donc non vide. Par conséquent, x est dans l'adhérence de M.

Supposons maintenant que $x \in \bar{M}$ et soit $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ une distance qui engendre la topologie sur X (X est métrisable). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a par définition que $B(x, \frac{1}{n+1}) \cap M \neq \varnothing$ et donc on peut choisir $x_n \in B(x, \frac{1}{n+1}) \cap M$. Ceci veut dire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi définie est telle que $x_n \in M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{N+1} < \varepsilon$. Par conséquent, pour tout $n > M$, $d(x_n, x) < \varepsilon$ et donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x. □

Exercice 4. Pour un espace topologique $(X, \mathcal{T})$, montrer que

(a) tout point limite d'un filtre est aussi un point d'accumulation;

(b) pour un ultrafiltre, la réciproque est aussi juste;

(c) X est de Hausdorff si et seulement si tout filtre converge au plus vers un point;

(d) pour tout sous-ensemble $M \subseteq X$ et $x \in X$ on a $x \in \overline{M}$ si et seulement s'il existe un filtre $\mathcal{F}$ sur M avec $\mathcal{F} \to x$ (dans X).

Preuve.

(a) Soit x est un point limite d'un filtre propre $\mathcal{F}$ et U est un voisinage ouvert de x. On a que $U \in \mathcal{F}$ et donc pour tout $A \in \mathcal{F}$, $U \cap A \in \mathcal{F}$ est non vide puisque $\mathcal{F}$ est propre. Ceci montre que x est un point d'accumulation de $\mathcal{F}$.

(b) Soit x un point d'accumulation d'un ultrafiltre $\mathcal{U}$ et V un voisinage ouvert de x. Puisque $V \cup (X \setminus V) = X \in \mathcal{U}$, on a que $V \in \mathcal{U}$ ou bien $X \setminus V \in \mathcal{U}$. Mais la deuxième possibilité est absurde puisque alors $V \cap X \setminus V \neq \varnothing$. Par conséquent, $V \in \mathcal{U}$ et donc x est un point limite de $\mathcal{U}$.

(c) Soit $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ deux filtres et définissons $S_{\mathcal{F},\mathcal{F}'} = \{A \cap B : A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{F}'\}$. On remarque que $\sup(\mathcal{F}, \mathcal{F}') = \mathcal{F}_X(S_{\mathcal{F},\mathcal{F}'})$ est propre si et seulement si pour tout $A \in \mathcal{F}$ et tout $B \in \mathcal{F}'$, $A \cap B \neq \varnothing$ (autrement dit $S_{\mathcal{F},\mathcal{F}'}$ est une base de filtre).

Par ailleurs, si $\mathcal{F}, \mathcal{F}' \subseteq \tilde{\mathcal{F}}$ alors $\sup(\mathcal{F}, \mathcal{F}') \subseteq \tilde{\mathcal{F}}$, autrement dit $\sup(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ est le plus petit filtre contenant $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$.

On remarque que par définition, un filtre $\mathcal{F}$ converge vers x s'il contient le filtre des voisinage de x, $\mathcal{V}(x)$. Par conséquent, $\sup(\mathcal{V}(x), \mathcal{V}(y))$ est le plus petit filtre qui converge à la fois vers x et y (Un filtre non propre converge vers tout les points).

On a alors que tout filtre propre converge au plus vers un point si et seulement si pour tout $x \neq y$, $\sup(\mathcal{V}(x), \mathcal{V}(y))$ n'est pas propre.

La dernière condition est équivalente au fait que X est Hausdorff.

(d) Pour tout filtre $\mathcal{F}$ sur X, on peut définir $\mathcal{F}|_M = \{A \cap M : A \in \mathcal{F}\}$. On remarque que c'est un filtre sur M qui est propre si $A \cap M \neq \varnothing$ pour tout $A \in \mathcal{F}$. En effet, la propriété de clôture par intersection finie découle de celle de $\mathcal{F}$ et si $A \cap M \subseteq B \subseteq M$, alors $A \cup B \in \mathcal{F}$ et donc $B = (A \cap M) \cup (B \cap M) = (A \cup B) \cap M \in \mathcal{F}|_M$.

Par ailleurs, si $\mathcal{G}$ est un filtre sur M, alors on remarque que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_X(\mathcal{G})$ si et seulement si $\mathcal{F}|_M \subseteq \mathcal{G}$.

En effet, si $A \cap M \in \mathcal{G}$ pour tout $A \in \mathcal{F}$, alors $A \cap M \subseteq A$ et donc $A \in \mathcal{F}_X(\mathcal{G})$.

Par ailleurs, si pour tout $A \in \mathcal{F}$, il existe $B \in \mathcal{G}$ avec $B \subseteq A$, alors $B \subseteq A \cap M$ et donc $A \cap M \in \mathcal{G}$.

L'existence d'un filtre propre $\mathcal{G}$ sur M convergeant vers x et donc équivalente à l'existence d'un filtre propre $\mathcal{G}$ sur M avec $\mathcal{V}(x)|_M \subseteq \mathcal{G}$. Ce dernier point est équivalent au fait que $\mathcal{V}(x)|_M$ est propre, c'est-à-dire que $V \cap M \neq \varnothing$ pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$. Cette dernière propriété est équivalente au fait que $x \in \bar{M}$. $\square$