TOPOLOGIE - SÉRIE 1

Exercice 1. Soit $f\colon A \to B$ une application. Prouver que

(a) $A' \subseteq f^{-1}fA'$ pour tout $A' \subseteq A$, avec égalité si f est injective;

(b) $ff^{-1}B' \subseteq B'$ pour tout $B' \subseteq B$, avec égalité si f est surjective;

Preuve. Ad (a): Soit $a \in A'$. Puisque $f(a) \in f(A')$, on a que $a \in f^{-1}f(A')$. Par conséquent, $A' \subseteq f^{-1}f(A')$.

Supposons f injective et soit $a \in f^{-1}f(A')$. Alors puisque $f(a) \in f(A')$, il existe $\tilde{a} \in A'$ tel que $f(a) = f(\tilde{a})$. Puisque f est injective, $a = \tilde{a} \in A'$. Nous avons donc montré que $f^{-1}f(A') = A'$ lorsque f est injective.

Ad (b): Soit $b \in ff^{-1}(B')$. Par définition, il existe $a \in f^{-1}(B')$ tel que $b = f(a)$. Puisque $a \in f^{-1}(B')$, $b = f(a) \in B'$. Par conséquent, $ff^{-1}B' \subset B'$.

Supposons f surjective et soit $b \in B'$. Alors il existe $a \in A$ tel que $f(a) = b$, c'est-à-dire tel que $a \in f^{-1}B'$. Par conséquent, $b = f(a) \in ff^{-1}B'$. Nous avons donc montré que $ff^{-1}B' = B'$ lorsque f est surjective. □

Exercice 2. Pour une application $f\colon A \to B$ montrer que

(a) l'opération préimage f^{-1} préserve les inclusions, les réunions, les intersections et les compléments; i.e. pour tous B', $B'' \subseteq B$ et toute famille $(B_i)_{i\in I}$ avec $B_i \subseteq B$

$$B' \subseteq B'' \;\Rightarrow\; f^{-1}B' \subseteq f^{-1}B'', \quad f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}B_i,$$

$$f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}B_i \quad \text{et} \quad f^{-1}(B \setminus B') = A \setminus f^{-1}B';$$

(b) l'opération image directe par f préserve (seulement) les inclusions et les réunions, i.e. pour tous A', $A'' \subseteq A$ et toute famille $(A_i)_{i\in I}$ avec $A_i \subseteq A$

$$A' \subseteq A'' \;\Rightarrow\; f(A') \subseteq f(A'') \quad \text{et} \quad f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i).$$

Preuve. Ad (a): L'opération préimage f^{-1} préserve les inclusions, les réunions, les intersections et les compléments.

$B' \subset B'' \Longrightarrow f^{-1}(B') \subset f^{-1}(B'')$; en effet

$$x \in f^{-1}(B') \Longrightarrow f(x) \in B' \subset B'' \Longrightarrow x \in f^{-1}(B'').$$

$f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$; en effet

$$x \in f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) \Longleftrightarrow f(x) \in \bigcup_{i\in I} B_i \Longleftrightarrow x \in \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i).$$

$f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$; en effet

$$x \in f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) \Longleftrightarrow f(x) \in \bigcap_{i\in I} B_i \Longleftrightarrow x \in \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i).$$

Date: 4 octobre 2013

$f^{-1}(B \setminus B') = A \setminus f^{-1}(B')$; en effet

$$x \in f^{-1}(B \setminus B') \iff f(x) \in B \setminus B' \iff f(x) \notin B' \iff x \in A \setminus f^{-1}(B').$$

Ad (b): L'opération image directe par f préserve (seulement) les inclusions et les réunions.

$A' \subset A'' \implies f(A') \subset f(A'')$; c'est évident.

$f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(A_i)$; en effet

$$y \in f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \iff \text{ il existe } x_i \in A_i \text{ tel que } y = f(x_i) \iff y \in \bigcup_{i \in I} f(A_i).$$

Définition. En notant $\mathfrak{P}X$ pour l'ensemble des parties d'un ensemble X, un *filtre* sur X est un ensemble $\mathcal{F} \subseteq \mathfrak{P}X$ non-vide tel que

(a) si A, $B \in \mathcal{F}$, alors $A \cap B \in \mathcal{F}$ (i.e. $\mathcal{F}$ est fermé sous intersections finies);

(b) si $A \in \mathcal{F}$ et $A \subseteq B \subseteq X$ alors $B \in \mathcal{F}$. (i.e. $\mathcal{F}$ est fermé sous extensions)

En particulier, on a $X \in \mathcal{F}$. Un tel filtre $\mathcal{F}$ est dit *propre* si et seulement si de plus

(c) $\mathcal{F} \neq \mathfrak{P}X$ ou de manière équivalente $\varnothing \notin \mathcal{F}$.

Notons $\mathrm{Flt}(X)$ pour l'ensemble des filtres sur X, qui est partiellement ordonné par inclusion. Parce que le filtre non propre $\mathcal{F} = \mathfrak{P}X$ n'est pas très intéressant, tous les filtres sont supposés propres sauf si dit autrement. Finalement, un filtre propre $\mathcal{F}$ est appelé *ultrafiltre* si et seulement si pour tous A, $B \subseteq X$

(d) $A \cup B \in \mathcal{F}$ implique $A \in \mathcal{F}$ ou $B \in \mathcal{F}$.

Exercice 3. Pour $x \in X$, montrer que l'ensemble $\mathcal{U}_x := \Uparrow\{x\} := \{A \subseteq X \mid x \in A\}$ est un ultrafiltre, appelé *l'ultrafiltre principal* engendré par x.

Preuve. Nous allons verifier les points (a) à (d) de la définition précédente.

(a) Soit $A, B \in \mathcal{U}_x$. alors $x \in A$ et $x \in B$, ce qui implique que $x \in A \cap B$ et donc $A \cap B \in \mathcal{U}_x$.

(b) Soit $A \in \mathcal{U}_x$ et $A \subseteq B \subseteq X$. alors $x \in A \subseteq B$ et donc $B \in \mathcal{U}_x$.

(c) $x \notin \varnothing$.

(d) Soient A, B deux sous-ensembles de X. Si $A \cup B \in \mathcal{U}_x$, alors $x \in A \cup B$, c'est-à-dire $x \in A$ ou $x \in B$. Ceci montre que $A \in \mathcal{U}_x$ ou $B \in \mathcal{U}_x$.

Exercice 4. Soit X un ensemble arbitraire. Montrer que

(a) l'intersection $\mathcal{F} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$ d'une famille des filtres $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ est aussi un filtre;

(b) pour $S \subseteq \mathfrak{P}X$ un ensemble de parties, l'ensemble

$$\mathcal{F}_X S := \{M \subseteq X \mid \exists n \in \mathbb{N},\, A_1, \ldots, A_n \in S \colon A_1 \cap \ldots \cap A_n \subseteq M\}$$

est le plus petit filtre (peut être non propre) qui contient S; i.e. $\mathcal{F}_X S$ est *engendré* par S;

(c) si l'ensemble S de (b) satisfait $\varnothing \notin S$ et pour chaque A, $B \in S$, il y a $C \in S$ tel que $C \subseteq A \cap B$ (on dit que S est une *base* de filtre), alors $\mathcal{F}_X S$ est propre.

Preuve. Ad (a): Soit $\mathcal{F} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$ l'intersection d'une famille de filtres. En utilisant la définition d'intersection on déduit les propriétés suivantes pour $\mathcal{F}$, qui montrent que $\mathcal{F}$ est un filtre.

- Si $A, B \in \mathcal{F}$, alors pour tout $i \in I$ on a que $A \cap B \in \mathcal{F}_i$, et donc $A \cap B \in \mathcal{F}$.
- Si $A \in \mathcal{F}$ et $A \subseteq B$, alors pour tout $i \in I$ on a que $B \in \mathcal{F}_i$, et donc $B \in \mathcal{F}$.
- Comme tout $\mathcal{F}_i$ est propre, il y a un $j \in I$ tel que $\varnothing \notin \mathcal{F}_i$. Donc $\varnothing \notin \mathcal{F}$.

Ad (b): Soit

$$\mathcal{F}_X S := \{M \subseteq X \mid \exists n \in \mathbb{N},\, A_1, \ldots, A_n \in S\colon A_1 \cap \ldots \cap A_n \subseteq M\}.$$

On va montrer que $\mathcal{F}_X S$ est un filtre (peut être impropre).

- Si $M, N \in \mathcal{F}_X S$, alors pour certains $m, n \in \mathbb{N}$ et $A_1, \ldots, A_m, B_1, \cdots, B_n \in S$ on a que

  $$A_1 \cap \ldots \cap A_m \subseteq M \text{ et } B_1 \cap \ldots \cap B_n \subseteq N;$$

  mais alors

  $$A_1 \cap \ldots \cap A_m \cap B_1 \cap \ldots \cap B_n \subseteq M \cap N,$$

  ce qui signifie que $M \cap N \in \mathcal{F}_X S$.
- Si $M \in \mathcal{F}_X S$ il y a $m \in \mathbb{N}$ et $A_1, \ldots, A_m \in S$ tels que $A_1 \cap \ldots \cap A_n \subseteq M$. Ensuite si $M \subseteq N$, on a que

  $$A_1 \cap \ldots \cap A_n \subseteq M \subseteq N,$$

  et donc $N \in \mathcal{F}_X S$.

Maintenant, clairement $\mathcal{F}_X S$ contient S. Ensuite on remarque que pour tout filtre $\mathcal{F}$ contenant S, il faut que $\mathcal{F}$ contienne $\mathcal{F}_X S$. En effet, si $M \in \mathcal{F}_X S$, et $A_1 \cap \ldots \cap A_n \subseteq M$ pour des $A_1, \ldots, A_n \in S$, alors $A_1 \cap \ldots \cap A_n \in \mathcal{F}$ et finalement $M \in \mathcal{F}$. *Ad (c):* Supposons que S ne contient pas $\varnothing$ et que pour tous $A, B \in S$ il existe $C \in S$ tel que $C \subseteq A \cap B$. On va montrer que tous éléments de M ne sont pas vide. Soit $M \in \mathcal{F}_X S$, satisfaisant $A_1 \cap \ldots \cap A_n \subseteq M$ pour des $A_1, \ldots, A_n \in S$. Par induction il y a un $A \in S$ tel que $A \subseteq A_1 \cap \ldots \cap A_n$, et donc

$$A \subseteq A_1 \cap \ldots \cap A_n \subseteq M;$$

en particulier M n'est pas vide. $\square$

Une propriété importante des ultrafiltres (que l'on va montrer plus tard dans le cours):

Théorème de l'Ultrafiltre. Tout filtre peut être étendu en un ultrafiltre.