

Topologie algébrique

Série 9

24.04.2017

L'exercice 2 est à rendre le 02.05.2017.

1. (Equivalences d'Eilenberg-Zilber et d'Alexander-Whitney)

(a) Montrer que pour tout couple d'espaces topologiques X et Y , il existe des équivalences de chaînes naturelles et mutuellement inverses

$$\nabla_{X,Y} : S_*^\varepsilon(X) \otimes S_*^\varepsilon(Y) \rightarrow S_*^\varepsilon(X \times Y)$$

et

$$\tau_{X,Y} : S_*^\varepsilon(X \times Y) \rightarrow S_*^\varepsilon(X) \otimes S_*^\varepsilon(Y).$$

En déduire que

$$H_*^{\text{sing}}(X \times Y) \cong H_*(S_*^\varepsilon X \otimes S_*^\varepsilon Y),$$

de façon naturelle en X et Y .

(b) Montrer que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} S_*^\varepsilon(X) \otimes S_*^\varepsilon(Y) \otimes S_*^\varepsilon(Z) & \xrightarrow{\nabla_{X,Y} \otimes \text{Id}_{S_*^\varepsilon(Z)}} & S_*^\varepsilon(X \times Y) \otimes S_*^\varepsilon(Z) \\ \text{Id}_{S_*^\varepsilon(X)} \otimes \nabla_{Y,Z} \downarrow & & \downarrow \nabla_{X \times Y, Z} \\ S_*^\varepsilon X \otimes S_*^\varepsilon(Y \times Z) & \xrightarrow{\nabla_{X,Y \times Z}} & S_*^\varepsilon(X \times Y \times Z) \end{array}$$

commute à homotopie de chaînes près.

2. Une *algèbre graduée* (sur \mathbb{Z}) consiste en une famille $A_* = \{A_n\}_{n \geq 0}$ de groupes abéliens, munie d'une famille d'homomorphismes

$$\mu_* = \{\mu_n : \bigoplus_{\ell+m=n} A_\ell \otimes A_m \rightarrow A_n\}_{n \geq 0}$$

et d'un homomorphisme $\eta : \mathbb{Z} \rightarrow A_0$ vérifiant l'*axiome d'unité*, i.e., les composées

$$A_n \cong A_n \otimes \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{Id}_{A_n} \otimes \eta} A_n \otimes A_0 \hookrightarrow \bigoplus_{\ell+m=n} A_\ell \otimes A_m \xrightarrow{\mu_n} A_n$$

et

$$A_n \cong \mathbb{Z} \otimes A_n \xrightarrow{\eta \otimes \text{Id}_{A_n}} A_0 \otimes A_n \hookrightarrow \bigoplus_{\ell+m=n} A_\ell \otimes A_m \xrightarrow{\mu_n} A_n$$

sont égales à l'identité pour tout $n \geq 0$, et *associativité*, i.e.,

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{k+\ell+m=n} A_k \otimes A_\ell \otimes A_m & \xrightarrow{\bigoplus_{0 \leq m \leq n} \mu_{n-m} \otimes \text{Id}_{A_m}} & \bigoplus_{0 \leq m \leq n} A_{n-m} \otimes A_m \\ \downarrow \bigoplus_{0 \leq k \leq n} \text{Id}_{A_k} \otimes \mu_{n-k} & & \downarrow \mu_n \\ \bigoplus_{0 \leq k \leq n} A_k \otimes A_{n-k} & \xrightarrow{\mu_n} & A_n \end{array}$$

commute pour tout $n \geq 0$.

Montrer que l'existence de la transformation naturelle ∇ implique que si G est un groupe topologique (i.e., l'inversion $G \rightarrow G : g \mapsto g^{-1}$ et la multiplication $G \times G \rightarrow G$ sont continues), alors $H_*^{\text{sing}}(G)$ est une algèbre graduée.

3. Montrer que tout espace topologique contractile est acyclique et que tout produit fini d'espaces acycliques est acyclique.