

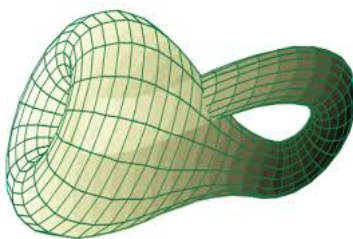
# Topologie algébrique

## Série 7

03.04.2017

**L'exercice 2 est à rendre le 11.04.2017.**

1. Utiliser l'excision simpliciale pour calculer l'homologie du tore et du plan projectif, relativement aux sous-complexes simpliciaux donnés par tous les 2-simplexes qui intersectent le bord des étiquetages correspondants.
2. La *bouteille de Klein* est un espace topologique qui est le quotient du carré  $I^2$  par la relation  $(0, t) \sim (1, t)$  pour tout  $t \in I$  et  $(s, 0) \sim (1 - s, 1)$  pour tout  $s \in I$ . Trouver une description de la bouteille de Klein comme espace obtenu par recollement d'un étiquetage et ensuite calculer son homologie simpliciale, en faisant appel à l'excision simpliciale.



(Conseil de visite: <http://www.kleinbottle.com>)

3. Etant donné un complexe simplicial  $\mathcal{K}$  et deux sous-complexes

$$\mathcal{M} \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{K},$$

trouver une longue suite exacte qui met en relation  $H_*(\mathcal{K}, \mathcal{L})$ ,  $H_*(\mathcal{K}, \mathcal{M})$ , et  $H_*(\mathcal{L}, \mathcal{M})$ .

4. Soit  $\mathcal{U}$  un recouvrement ouvert d'un espace topologique  $X$ . Le *nerf* de  $\mathcal{U}$ , noté  $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ , est le complexe simplicial abstrait défini par

$$\mathcal{N}(\mathcal{U})_n = \left\{ \{U_0, \dots, U_n\} \subset \mathcal{U} \mid \bigcap_{0 \leq k \leq n} U_k \neq \emptyset \right\}.$$

- (a) Montrer que  $\mathcal{N}(\mathcal{U})$  est bien un complexe simplicial abstrait.
  - (b) Trouver des recouvrements ouverts  $\mathcal{U}$  de  $S^1$  et  $\mathcal{V}$  de  $S^2$  tels que  $|\mathcal{K}_{\mathcal{N}(\mathcal{U})}| \cong S^1$  et  $|\mathcal{K}_{\mathcal{N}(\mathcal{V})}| \cong S^2$ . Est-ce que tout recouvrement ouvert de  $S^1$  ou de  $S^2$  vérifie cette propriété?
5. Montrer que l'homologie singulière d'un espace topologique est isomorphe à la somme directe des homologies singulières de ses composantes connexes par arcs. Calculer l'homologie singulière d'un espace discret.