

Topologie algébrique

Série 6

27.03.2017

L'exercice 4 est à rendre le 04.04.2017.

1. Soit \mathcal{K} un complexe simplicial dans \mathbb{R}^n . Si

$$v = (0, \dots, 0, 1), w = (0, \dots, 0, -1) \in \mathbb{R}^{n+1},$$

alors la *suspension simpliciale* de \mathcal{K} est $\Sigma\mathcal{K} = (v * \mathcal{K}) \cup (w * \mathcal{K})$. Montrer que $\Sigma\mathcal{K}$ est un complexe simplicial et calculer son homologie simpliciale en fonction de l'homologie simpliciale de \mathcal{K} . A quel espace bien connu est-ce que le polytope $|\Sigma^n \partial\mathcal{K}(\Delta^m)|$ (où $n, m \geq 1$) est homéomorphe ?

2. Appliquer le Théorème de Mayer-Vietoris simplicial au calcul des groupes d'homologie du cylindre simplicial et de la bande de Möbius simpliciale (cf. Série 4, Exo 4(d)).
3. Le *plan projectif réel* $\mathbb{R}P^2$ est l'espace quotient D^2 / \sim , où D^2 est le disque de rayon 1 dans le plan \mathbb{R}^2 , et $(x, y) \sim (-x, -y)$ pour tout $(x, y) \in S^1$. Trouver une description de $\mathbb{R}P^2$ comme espace obtenu par recollement d'un étiquetage et ensuite calculer son homologie simpliciale, en utilisant le Théorème de Mayer-Vietoris simplicial.
4. Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble fini, et soit $\varepsilon \geq 0$. Le *complexe de Vietoris-Rips* associé au couple (A, ε) , noté $VR(A, \varepsilon)$, est le complexe simplicial abstrait défini par

$$VR(A, \varepsilon)_n = \{ \{a_0, \dots, a_n\} \subset A \mid d(a_i, a_j) \leq \varepsilon \forall i, j \},$$

où d est la distance euclidienne.

- (a) Montrer que $VR(A, \varepsilon)$ est bien un complexe simplicial abstrait.
- (b) Montrer que si $\varepsilon < \varepsilon'$, il existe un morphisme simplicial

$$\iota_{\varepsilon, \varepsilon'} : \mathcal{K}_{VR(A, \varepsilon)} \rightarrow \mathcal{K}_{VR(A, \varepsilon')}$$

tel que $\iota_{\varepsilon, \varepsilon''} = \iota_{\varepsilon', \varepsilon''} \circ \iota_{\varepsilon, \varepsilon'}$ pour tout $\varepsilon < \varepsilon' < \varepsilon''$.

(c) Trouver un sous-ensemble fini A de \mathbb{R}^2 tel que

$$H_0VR(A, 0) = \mathbb{Z}^{\oplus 5}, H_0VR(A, \frac{1}{2}) = \mathbb{Z}^{\oplus 3}, H_0VR(A, \frac{\sqrt{2}}{2}) = \mathbb{Z}^{\oplus 2}, H_0VR(A, \varepsilon) = \mathbb{Z} \quad \forall \varepsilon > 1,$$

$$H_1VR(A, 0) = H_1VR(A, \frac{1}{2}) = H_1VR(A, \frac{\sqrt{2}}{2}) = 0, H_1VR(A, 1) = \mathbb{Z}, H_1VR(A, \varepsilon) = 0 \quad \forall \varepsilon > \frac{\sqrt{6}}{2}.$$