Topologie algébrique
Série 9

26.04.2016

L'exercice 2 est à rendre le 03.05.2016.

1. (Géométrie de simplexes)

   (a) Montrer que si $\sigma = [v_0, ..., v_m]$ est un m-simplexe géométrique dans $\mathbb{R}^n$, alors
   $$\operatorname{diam} \sigma = \max \left\{ ||v_i - v_j|| \mid 0 \leq i < j \leq m \right\}.$$

   (b) Soit $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$ un complexe simplicial de dimension m. Montrer que
   $$\mu(\operatorname{sd} \mathcal{K}) \leq \frac{m}{m+1} \mu(\mathcal{K}),$$
   où μ désigne la maille du complexe simplicial.

2. (Invariance de dimension)

   (a) Montrer que $\widetilde{H}_k^{\text{sing}}(S^n) = 0$ pour tout $k \neq n$.

   (b) Soient $U \subseteq \mathbb{R}^m$ et $V \subseteq \mathbb{R}^n$ des ouverts (par rapport à la topologie standard). Montrer que si U et V sont homéomorphes, alors $m = n$. (Indication: choisir $x \in U$ et considérer le couple $\big(U, U \smallsetminus \{x\}\big)$...)

3. (Quotients homotopiques) Soit (X, A) un couple d'espaces topologiques. Le *quotient homotopique* de X par A est l'espace
   $$X \cup CA = X \coprod CA / \sim,$$
   où CA est le cône sur A et $a \sim (a, 0)$ pour tout $a \in A$. Montrer que $\widetilde{H}_n^{\text{sing}}(X \cup CA) \cong H_n^{\text{sing}}(X, A)$ pour tout n. (Ce résultat nous permet d'interpréter l'homologie du couple (X, A) comme l'homologie d'un seul espace, même lorsque A n'est pas rétraction par déformation forte d'un ouvert de X.)