Topologie algébrique
Série 7

12.04.2016

L'exercice 2 est à rendre le 19.04.2016.

1. (Homologie à coefficients) Soit G un group abélien.

   (a) Soit $C = (C_*, d_*)$ un complexe de chaînes sur $\mathbb{Z}$. Considérer la suite d'homomorphismes

   $$\cdots \to C_{n+1} \otimes G \xrightarrow{d_{n+1} \otimes \mathrm{Id}_G} C_n \otimes G \xrightarrow{d_n \otimes \mathrm{Id}_G} C_{n-1} \otimes G \to \cdots,$$

   notée $C \otimes G = (C_* \otimes G, d_* \otimes \mathrm{Id}_G)$. Montrer que $C \otimes G$ est aussi un complexe de chaînes.

   (b) Trouver un exemple d'un complexe de chaînes C et d'un groupe abélien G tels que $H_*(C \otimes G) \ncong H_*(C) \otimes G$.

   (c) Soit $\Bbbk$ un corps de caractéristique 0. Montrer que $H_*(C \otimes \Bbbk) \cong H_*(C) \otimes \Bbbk$ pour tout complexe de chaînes C sur $\mathbb{Z}$.

   (d) Soit G un groupe abélien, et poser $S_*(X; G) = S_*X \otimes G$. *L'homologie singulière à coefficients dans* G d'un espace topologique X est

   $$H_*^{\mathrm{sing}}(X; G) = H_*\big(S_*(X; G)\big).$$

   Montrer que toute courte suite exacte $0 \to G' \to G \to G'' \to 0$ de groupes abéliens induit une longue suite exacte

   $$\cdots \to H_n^{\mathrm{sing}}(X; G') \to H_n^{\mathrm{sing}}(X; G) \to H_n^{\mathrm{sing}}(X; G'') \to H_{n-1}^{\mathrm{sing}}(X; G') \to \cdots.$$

2. (Produits tensoriels de complexes de chaînes) Soient $C = (C_*, d_*)$ et $C' = (C'_*, d'_*)$ des complexes de chaînes sur $\mathbb{Z}$.

   (a) Définir $C \otimes C' = \big((C \otimes C')_*, D_*\big)$ par $(C \otimes C')_n = \bigoplus_{\ell+m=n} C_\ell \otimes C'_m$ avec différentielle $D_n : (C \otimes C')_n \to (C \otimes C')_{n-1}$ donnée par

   $$D_n(c \otimes c') = d_\ell c \otimes c' + (-1)^\ell c \otimes d'_m c',$$

   pour $c \in C_\ell$ and $c' \in C'_m$. Montrer que $C \otimes C'$ est bien un complexe de chaînes.

(b) Montrer qu'il y a un homomorphisme naturel

$$\alpha : \bigoplus_{\ell+m=n} H_\ell C \otimes H_m C' \to H_n(C \otimes C'),$$

pour tout n, qui est un isomorphisme si $d'_j : C'_j \to C'_{j-1}$ est une application linéaire entre $\mathbb{k}$-espaces vectoriels pour tout j ($\mathbb{k}$ un corps de caractéristique 0). Trouver un exemple où α n'est pas un isomorphisme.

3. (Equivalences d'Eilenberg-Zilber et d'Alexander-Whitney)

(a) Montrer que pour tout couple d'espaces topologiques X et Y, il existe des équivalences de chaînes naturelles et mutuellement inverses

$$\nabla_{X,Y} : S_*(X) \otimes S_*(Y) \to S_*(X \times Y)$$

et

$$\tau_{X,Y} : S_*(X \times Y) \to S_*(X) \otimes S_*(Y).$$

En déduire que pour tout groupe abélien G

$$H_*^{\text{sing}}(X \times Y; G) \cong H_*\big(S_*(X;G) \otimes S_*(Y;G)\big),$$

de façon naturelle en X, Y, et G.

(b) Montrer qu'il y a une homotopie de chaînes naturelle de

$$(\mathrm{Id}_{S_*X} \otimes \tau_{Y,Z}) \circ \tau_{X,Y\times Z}$$

vers

$$(\tau_{X,Y} \otimes \mathrm{Id}_{S_*Z}) \circ \tau_{X\times Y,Z},$$

pour tout triplet d'espaces X, Y, Z, i.e., le diagramme

$$\begin{tikzcd}
S_*(X \times Y \times Z) \arrow[r, "\tau_{X\times Y,Z}"] \arrow[d, "\tau_{X,Y\times Z}"'] & S_*(X \times Y) \otimes S_*(Z) \arrow[d, "\tau_{X,Y} \otimes \mathrm{Id}_{S_*Z}"] \\
S_*X \otimes S_*(Y \times Z) \arrow[r, "\mathrm{Id}_{S_*X} \otimes \tau_{Y,Z}"] & S_*X \otimes S_*Y \otimes S_*Z
\end{tikzcd}$$

commute à homotopie de chaînes près.