Topologie algébrique
Série 6
(corrigée)

05.04.2016

L'exercice 1 est à rendre le 12.04.2016.

1. Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert d'un espace topologique X. Le *nerf* de $\mathcal{U}$, noté $\mathcal{N}(\mathcal{U})$, est le complexe simplicial abstrait défini par

$$\mathcal{N}(\mathcal{U}) = \big\{\{U_0, ..., U_n\} \subset \mathcal{U} \mid \bigcap_{0\leq k\leq n} U_k \neq \emptyset\big\}.$$

   (a) Montrer que $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ est bien un complexe simplicial abstrait.

   (b) Soit $\mathcal{V}$ un autre recouvrement ouvert de X qui est un *raffinement* de $\mathcal{U}$ (i.e., pour tout $V \in \mathcal{V}$, il existe $U \in \mathcal{U}$ tel que $V \subseteq U$). Construire un morphisme simplicial

$$\iota_{\mathcal{U},\mathcal{V}} : \mathcal{K}_{\mathcal{N}(\mathcal{V})} \to \mathcal{K}_{\mathcal{N}(\mathcal{U})}$$

   (voir Exercice 3(b) de la Série 3 pour le sens de la notation $\mathcal{K}_{\mathcal{S}}$).

   (c) Trouver des recouvrements ouverts $\mathcal{U}$ de S^1 et $\mathcal{V}$ de S^2 tels que $|\mathcal{K}_{\mathcal{N}(\mathcal{U})}| \cong S^1$ et $|\mathcal{K}_{\mathcal{N}(\mathcal{V})}| \cong S^2$. Est-ce que tout recouvrement ouvert de S^1 ou de S^2 vérifie cette propriété?

2. Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble fini, et soit $\varepsilon > 0$. Le *complexe de Vietoris-Rips* associé au couple (A, ε), noté $VR(A, \varepsilon)$, est le complexe simplicial abstrait défini par

$$VR(A,\varepsilon)_n = \big\{\{a_0, ..., a_n\} \subset A \mid d(a_i, a_j) < \varepsilon \;\forall i, j\big\}.$$

   (a) Montrer que $VR(A, \varepsilon)$ est bien un complexe simplicial abstrait.

   (b) Montrer que si $\varepsilon < \varepsilon'$, il exist un morphisme simplicial

$$\iota_{\varepsilon,\varepsilon'} : \mathcal{K}_{VR(A,\varepsilon)} \to \mathcal{K}_{VR(A,\varepsilon')}$$

   tel que $\iota_{\varepsilon,\varepsilon''} = \iota_{\varepsilon',\varepsilon''} \circ \iota_{\varepsilon,\varepsilon'}$ pour tout $\varepsilon < \varepsilon' < \varepsilon''$.

(c) Trouver un sous-ensemble fini A de $\mathbb{R}^2$ tel que

$$H_0VR(A,0) = \mathbb{Z}^{\oplus 5}, H_0VR(A,\frac{1}{2}) = \mathbb{Z}^{\oplus 3}, H_0VR(A,\frac{\sqrt{2}}{2}) = \mathbb{Z}^{\oplus 2}, H_0VR(A,\varepsilon) = \mathbb{Z}\ \forall \varepsilon > 1,$$

$$H_1VR(A,0) = H_1VR(A,\frac{1}{2}) = H_1VR(A,\frac{\sqrt{2}}{2}) = 0, H_1VR(A,1) = \mathbb{Z}, H_1VR(A,\varepsilon) = 0\ \forall \varepsilon > \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3. Montrer que l'homologie singulière d'un espace topologique est isomorphe à la somme directe des homologies singulières de ses composantes connexes par arcs.

4. Calculer l'homologie singulière d'un espace discret.