Topologie algébrique
Série 5

22.03.2016

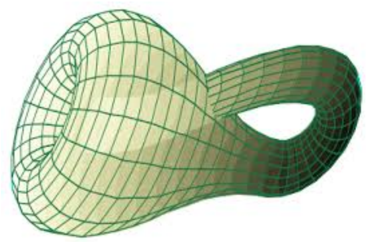
L'exercice 1 est à rendre le 05.04.2016.

1. Soit $\mathcal{K}$ un complexe simplicial dans $\mathbb{R}^n$. Si
$$v = (0, ..., 0, 1), w = (0, ..., 0, -1) \in \mathbb{R}^{n+1},$$
alors la *suspension simpliciale* de $\mathcal{K}$ est $\Sigma\mathcal{K} = (v * \mathcal{K}) \cup (w * \mathcal{K})$. Montrer que $\Sigma\mathcal{K}$ est un complexe simplicial et calculer son homologie simpliciale en fonction de l'homologie simpliciale de $\mathcal{K}$.

2. Etant donné un complexe simplicial $\mathcal{K}$ et deux sous-complexes
$$\mathcal{M} \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{K},$$
trouver une longue suite exacte qui met en relation $H_*(\mathcal{K}, \mathcal{L})$, $H_*(\mathcal{K}, \mathcal{M})$, et $H_*(\mathcal{L}, \mathcal{M})$.

3. Soit $\mathcal{K}$ un complexe simplicial obtenu par recollement d'un étiquettage d'un carré "triangulé", comme le tore, le plan projectif, et la bouteille de Klein (voir ci-dessous). Soit $\mathcal{L}$ l'image du bord du carré sous le recollement. Observer que $C_*(\mathcal{L}, <)$ est un sous-complexe de chaînes de $C_*(\mathcal{K}, <)$.
   (a) Montrer que, quelque soit l'orientation $<$ choisie sur $\mathcal{K}$, tout 1-cycle de $C_1(\mathcal{K}, <)$ est homologue à un 1-cycle de $C_1(\mathcal{L}, <)$.
   (b) Soit $c \in C_2(\mathcal{K}, <)$. Montrer que si $d_2 c \in C_1(\mathcal{L}, <)$, alors c est un multiple de la somme des images tous les 2-simplexes du carré sous le recollement.

4. La *bouteille de Klein* est un espace topologique qui est le quotient du carré I^2 par la relation $(0,t) \sim (1,t)$ pour tout $t \in I$ et $(s,0) \sim (1-s,1)$ pour tout $s \in I$. Trouver une description de la bouteille de Klein comme espace obtenu par recollement d'un étiquettage et ensuite calculer son homologie simpliciale.



(Conseil de visite: http://www.kleinbottle.com)