Topologie algébrique
Série 4

15.03.2016

L'exercice 3 est à rendre le 22.03.2016.

1. Considérer le foncteur oubli $U : \mathsf{Ab} \to \mathsf{Set}$ et le foncteur "groupe abélien libre" $F_{\mathsf{Ab}} : \mathsf{Set} \to \mathsf{Ab}$. Montrer qu'il y a une bijection

$$\alpha : \mathsf{Ab}\big(F_{\mathsf{Ab}}(X), A\big) \xrightarrow{\cong} \mathsf{Set}\big(X, U(A)\big)$$

   pour tout ensemble X et groupe abélien A et que cette bijection est naturelle en X et en A. Qu'est-ce que $\alpha^{-1}(\mathrm{Id}_{U(A)})$?

2. Utiliser la description du tore comme un espace obtenu par recollement d'un étiquettage (Série 3, Exercice 4e) pour calculer son homologie simpliciale.

3. Le *plan projectif réel* $\mathbb{R}P^2$ est l'espace quotient $D^2/\sim$, où D^2 est le disque de rayon 1 dans le plan $\mathbb{R}^2$, et $(x, y) \sim (-x, -y)$ pour tout $(x, y) \in S^1$. Trouver une description de $\mathbb{R}P^2$ comme espace obtenu par recollement d'un étiquettage et ensuite calculer son homologie simpliciale.

4. Soient A et B des groupes abéliens de génération finie. Si B est abélien libre, montrer qu'il existe un complexe simplicial $\mathcal{K}$ de dimension 2 tel que $|\mathcal{K}|$ soit connexe, $H_1\mathcal{K} \cong A$, et $H_2\mathcal{K} \cong B$.