

Topologie algébrique

Série 3

08.03.2016

L'exercice 4 est à rendre le 15.03.2016.

1. (Propriétés des homotopies de chaînes)
 - (a) Montrer que la relation “il existe une homotopie de chaînes de f vers g ” est une relation d'équivalence sur $\text{Ch}_A(C, C')$ pour tous $C, C' \in \text{ObCh}_A$.
 - (b) Montrer que si $f, f' : C \rightarrow C'$ et $g, g' : C' \rightarrow C''$ sont des morphismes de chaînes tels que $f \simeq f'$ et $g \simeq g'$, alors $gf \simeq g'f'$.
2. (Topologie de polytopes) Soit \mathcal{K} un complexe simplicial.
 - (a) Montrer que $|\mathcal{K}|$ est de Hausdorff.
 - (b) Montrer que si \mathcal{K} est fini, alors $|\mathcal{K}|$ est compact.
 - (c) Montrer que si A un sous-espace compact de $|\mathcal{K}|$, alors il existe un sous-complexe fini \mathcal{K}' de \mathcal{K} tel que $A \subseteq |\mathcal{K}'|$.
3. (Complexes simpliciaux abstraits)

Definition 1. Un *complexe simplicial abstrait* consiste en une collection \mathcal{S} d'ensembles nonvides telle que si $\sigma \in \mathcal{S}$, alors $\tau \in \mathcal{S}$ pour tout $\emptyset \neq \tau \subset \sigma$. Un élément $\sigma \in \mathcal{S}$ est un *simplexe* de \mathcal{S} . Un simplexe σ de cardinalité $n+1$ est un *n-simplexe* de \mathcal{S} ; l'ensemble des *n-simplexes* de \mathcal{S} est noté \mathcal{S}_n . Si $\emptyset \neq \tau \subset \sigma$, alors τ est une *face* de σ . Deux complexes simpliciaux abstraits \mathcal{S} et \mathcal{S}' sont *isomorphes* s'il y a une bijection $\alpha : \mathcal{S}_0 \rightarrow \mathcal{S}'_0$ induisant des bijections $\mathcal{S}_n \rightarrow \mathcal{S}'_n$ pour tout n .

- (a) Soit \mathcal{K} un complexe simplicial (non-abstrait). Soit $\mathcal{S}(\mathcal{K})$ la collection d'ensembles

$$\mathcal{S}(\mathcal{K}) = \left\{ \{v_0, \dots, v_n\} \mid \{\{v_0\}, \dots, \{v_n\}\} \subset \mathcal{K}_0 \text{ tq } [v_0, \dots, v_n] \in \mathcal{K}_n, n \geq 0 \right\}.$$

Montrer que $\mathcal{S}(\mathcal{K})$ est un complexe simplicial abstrait.

- (b) Montrer que pour tout complexe simplicial abstrait \mathcal{S} , il existe un complexe simplicial $\mathcal{K}_{\mathcal{S}}$ tel que \mathcal{S} soit isomorphe à $\mathcal{S}(\mathcal{K}_{\mathcal{S}})$.
4. (Construction de complexes simpliciaux par recollement) Soient \mathcal{K} un complexe simplicial and W un ensemble, et soit $\rho : \mathcal{K}_0 \rightarrow W$ une application surjective, appelé un *étiquetage* des sommets de \mathcal{K} . Soit $\mathcal{S}(r)$ la collection d'ensembles

$$\mathcal{S}(r) = \{ \{ \rho(v_0), \dots, \rho(v_n) \} \mid [v_0, \dots, v_n] \in \mathcal{K}_n, n \geq 0 \}.$$

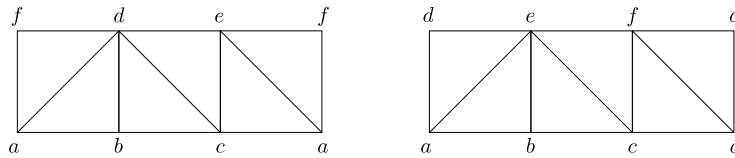
(Observer que la cardinalité de $\{ \rho(v_0), \dots, \rho(v_n) \}$ peut être inférieur à $n+1$, car ρ n'est pas forcément injective.)

- (a) Montrer que $\mathcal{S}(r)$ est un complexe simplicial abstrait.
- (b) Montrer que l'application $\mathcal{K}_0 \rightarrow \mathcal{S}(r)_0$ induite par ρ s'étend en une application continue (linéaire sur chaque simplexe) et surjective

$$\widehat{\rho} : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}_{\mathcal{S}(r)}.$$

On appelle le complexe simplicial $\mathcal{K}_{\mathcal{S}(r)}$ le *recollement de \mathcal{K} selon r* .

- (c) Montrer que $\widehat{\rho}$ est une application quotient et que l'on peut donc voir $\mathcal{K}_{\mathcal{S}(r)}$ comme un espace quotient de \mathcal{K} . Quelle est la relation d'équivalence associée sur \mathcal{K} ?
- (d) Pour les étiquetages suivants, dire quels sont les espaces obtenus par recollement.



- (e) Trouver un étiquetage dont l'espace obtenu par recollement est homéomorphe au tore.