Topologie algébrique
Série 2
(nouvelle version)

01.03.2016

L'exercice 3 est à rendre le 08.03.2016.

1. (Sommes directes de complexes de chaînes) Si $C = (C_*, d_*)$ et $C' = (C'_*, d'_*)$ sont des complexes de chaînes sur un anneau commutatif A, leur *somme directe* $C \oplus C'$ est le complexe de chaînes défini par $(C \oplus C')_n = C_n \oplus C'_n$ pour tout n, avec différentielle

$$d''_n : C_n \oplus C'_n \to C_{n-1} \oplus C'_{n-1} : c + c' \mapsto d_n c + d'_n c'.$$

   Montrer que $H_n(C \oplus C') \cong H_n(C) \oplus H_n(C')$ (en tant que A-modules) pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

2. Soit $0 \to C \xrightarrow{f} C \xrightarrow{g} C'' \to 0$ une suite exacte de morphismes de chaînes. Montrer que la suite

$$... \to H_{n+1}C'' \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n C' \xrightarrow{H_n f} H_n C \xrightarrow{H_n g} H_n C'' \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}C' \to ...$$

   construite au cours est exacte.

3. (Suite exacte de Mayer-Vietoris) Soit C un complexe de chaînes, et soient C', C'' des sous-complexes de C tel que $C_n = C'_n + C''_n$ (somme non forcément directe!) pour tout n. Montrer que $C' \cap C''$ est aussi un sous-complexe de C. Trouver une longue suite exacte qui met en relation les groupes d'homologie de C, de $C' \oplus C''$, et de $C' \cap C''$.

4. (Le lemme du serpent) Soit A un anneau commutatif, et soit

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d, "f'"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "f''"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r] & N \arrow[r] & N'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

un diagramme commutatif de morphismes dans Mod_A, où chaque ligne est exacte. Montrer qu'il y a une suite exacte induite

$$0 \to \ker f' \to \ker f \to \ker f'' \to \operatorname{coker} f' \to \operatorname{coker} f \to \operatorname{coker} f'' \to 0.$$