Topologie algébrique
Série 13

31.05.2016

L'exercice 2 peut être rendu au plus tard le 07.06.2016 à 17h pour un bonus.

1. Démontrer les propriétés suivantes de Hom.
   (a) $\mathrm{Hom}(\bigoplus_{j\in\mathcal{J}} G_j, H) \cong \prod_{j\in\mathcal{J}} \mathrm{Hom}(G_j, H)$ pour toute famille de groupes abéliens $\{G_j \mid j \in \mathcal{J}\}$.
   (b) $\mathrm{Hom}(G, \prod_{j\in\mathcal{J}} H_j) \cong \prod_{j\in\mathcal{J}} \mathrm{Hom}(G, H_j)$ pour toute famille de groupes abéliens $\{H_j \mid j \in \mathcal{J}\}$.
   (c) $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, H) \cong H$ pour tout groupe abélien H.
   (d) $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, H) \cong \mathrm{Tor}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, H)$ pour tout groupe abélien H et tout m.

2. Démontrer les propriétés suivantes de Ext.
   (a) $\mathrm{Ext}(\bigoplus_{j\in\mathcal{J}} G_j, H) \cong \prod_{j\in\mathcal{J}} \mathrm{Ext}(G_j, H)$ pour toute famille de groupes abéliens $\{G_j \mid j \in \mathcal{J}\}$.
   (b) $\mathrm{Ext}(G, \prod_{j\in\mathcal{J}} H_j) \cong \prod_{j\in\mathcal{J}} \mathrm{Ext}(G, H_j)$ pour toute famille de groupes abéliens $\{H_j \mid j \in \mathcal{J}\}$.
   (c) Si G est abélien libre, $\mathrm{Ext}(G, H) \cong 0$ pour tout groupe abélien H.
   (d) $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, H) \cong H/mH$ pour tout groupe abélien H et tout m.

   Comme conséquence de ces propriétés, donner une formule pour $H^*(X; \Bbbk)$, où $\Bbbk$ est un corps de caractérstique zéro.

3. Calculer
   (a) $H^*(\mathbb{C}P^m; G)$ pour G un group abélien quelconque.
   (b) $H^*(\mathbb{R}P^m; \mathbb{Q})$,
   (c) $H^*(\mathbb{R}P^m; \mathbb{Z})$, et
   (d) $H^*(\mathbb{R}P^m; \mathbb{F}_2)$.