Topologie algébrique
Série 11

17.05.2016

L'exercice 2 est à rendre le 24.05.2016.

1. Soit $\mathcal{F} = \big(X_0 \subseteq X_1 \subseteq \cdots \subseteq X_n \subseteq X_{n+1} \subseteq \cdots\big)$ une *filtration* d'un espace topologique X, i.e., une suite d'inclusions de sous-espaces.

   (a) Utiliser les longues suites exactes associées aux couples (X_n, X_{n-1}) pour construire un complexe de chaînes $C(\mathcal{F})$ avec

   $$C(\mathcal{F})_n = H_n(X_n, X_{n-1}).$$

   (b) Montrer que si l'inclusion $i_n : X_n \hookrightarrow X$ induit des isomorphismes $H_k X_n \xrightarrow{\cong} H_k X$ pour tout $k < n$ et $H_k X_n = 0$ pour tout $k > n$, alors

   $$H_n C(\mathcal{F}) \cong H_n X$$

   pour tout n.

2. Supposons que X_0 soit un espace discret, et que, pour tout $n \geq 1$, le sous-espace X_n soit construit par attachement de n-cellules (i.e., disques D^n) à X_{n-1}. Supposons enfin que la topologie de X vérifie la condition suivante: $A \subset X$ est fermé si et seulement si $A \cap X_n$ est fermé dans X_n pour tout n. (On dit alors que X est un *CW-complexe*, et $C(\mathcal{F})$ est appelé le *complexe cellulaire* de X.)

   (a) Montrer que $H_k(X_n, X_{n-1}) = 0$ si $k \neq n$ et que $H_n(X_n, X_{n-1})$ est abélien libre sur une base formée des n-cellules de X_n.

   (b) Montrer que $H_k X_n = 0$ pour tout $k > n$ et que l'inclusion $X_n \hookrightarrow X$ induit des isomorphismes $H_k X_n \cong H_k X$ pour tout $k < n$. Conclure que $H_n C(\mathcal{F}) \cong H_n X$ pour tout n.

   (c) Montrer que si X est un CW-complexe qui n'a aucune n-cellule, alors $H_n X = 0$.

   (d) Calculer $H_*(S^m \times S^n)$.

3. Soit $\mathcal{K}$ un complexe simplicial, et soit $\mathcal{K}_n$ le sous-complexe simplicial formé de tous les simplexes de dimension au plus n. Poser

$$\mathcal{F} = \big(|\mathcal{K}_0| \subseteq |\mathcal{K}_1| \subseteq \cdots \subseteq |\mathcal{K}_n| \subseteq |\mathcal{K}_{n+1}| \subseteq \cdots\big).$$

   Montrer que $H_n C(\mathcal{F}) \cong H_n|K|$ pour tout n.

4. Soit $\mathcal{K}$ un complexe simplicial. Soient $\mathcal{L}, \mathcal{L}'$ deux sous-complexes de $\mathcal{K}$ tels que $\mathcal{L} \cup \mathcal{L}' = \mathcal{K}$. Montrer que $\big(|\mathcal{K}|; |\mathcal{L}_1|, |\mathcal{L}_2|\big)$ est un triplet excisif.