Topologie algébrique
Série 10

10.05.2016

L'exercice 1 est à rendre le 17.05.2016.

1. (Espaces de Moore)

   (a) Soient $m > 0$ et $n \geq 1$. Construire par attachement de cellule un espace topologique $M(\mathbb{Z}/m, n)$ (appelé un *espace de Moore*) tel que
   $$\widetilde{H}_k^{\text{sing}}\big(M(\mathbb{Z}/m, n)\big) = \begin{cases} \mathbb{Z}/m & : k = n \\ 0 & : \text{sinon.} \end{cases}$$

   (b) Etant donné une suite $G_1, G_2, ..., G_n, ...$ de groupes abéliens de génération finie, construire un espace topologique X tel que
   $$\widetilde{H}_k^{\text{sing}}(X) = \begin{cases} 0 & : k = 0 \\ G_k & : k > 0. \end{cases}$$

2. (Espaces projectifs réels) Soit $\mathbb{R}P^n$ l'*espace projectif réel de dimension* n, i.e., l'espace des droites dans $\mathbb{R}^{n+1}$ qui passent par l'origine. Plus explicitement, $\mathbb{R}P^n = \mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \{0\}/\sim$, où
   $$x \sim x' \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } x = \lambda x'.$$

   (a) Montrer que $\mathbb{R}P^n \cong S^n/\sim$, où $x \sim -x$ pour tout $x \in S^n$.

   (b) Montrer que $\mathbb{R}P^n$ est compact et de Hausdorff.

   (c) Montrer que l'inclusion $\mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \{0\} \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+2} \smallsetminus \{0\}$ induit une inclusion $\mathbb{R}P^n \hookrightarrow \mathbb{R}P^{n+1}$.

   (d) Montrer que $\mathbb{R}P^0$ est un singleton et que $\mathbb{R}P^1 \cong S^1$.

   (e) Montrer que $\mathbb{R}P^n$ est obtenu à partir de $\mathbb{R}P^{n-1}$ en attachant D^n le long de l'application quotient $S^{n-1} \to \mathbb{R}P^{n-1}$.

   (f) Calculer $\widetilde{H}_k^{\text{sing}}(\mathbb{R}P^n)$ pour tout n et tout k. (Attention à la différence entre les cas n pair et n impair!)