Topologie algébrique
Série 1
(nouvelle version)

23.02.2016

L'exercice 4 est à rendre le 01.03.2016.

1. Un morphisme $f : A \to B$ dans une catégorie $\mathcal{C}$ est un *isomorphisme* s'il existe un autre morphisme $g : B \to A$ dans $\mathcal{C}$ tel que $g \circ f = \mathrm{Id}_A$ and $f \circ g = \mathrm{Id}_B$.

   (a) Quels sont les isomorphismes dans Set, Top, et Gr? Et dans la catégorie $\mathsf{B}G$ provenant d'un groupe G?

   (b) Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur. Montrer que si $f : A \to B$ est un isomorphisme dans $\mathcal{C}$, alors $F(f)$ est un isomorphisme dans $\mathcal{D}$. Est-ce que le contraire est vrai aussi?

2. Soient $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, et $\mathcal{E}$ des catégories. Montrer que pour tout couple de foncteurs $F : \mathcal{E} \to \mathcal{C}$ and $G : \mathcal{E} \to \mathcal{D}$, il y a un unique foncteur $(F, G) : \mathcal{E} \to \mathcal{C} \times \mathcal{D}$ tel que $P_1 \circ (F, G) = F$ and $P_2 \circ (F, G) = G$, où $P_1 : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ et $P_2 : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ sont les foncteurs de "projection sur les coordonnées".

3. Montrer que les petites catégories (celles dont la classe des objets est en fait un ensemble) et les foncteurs entre petites catégories forment aussi une catégorie, notée Cat. Montrer ensuite qu'il existe une catégorie dont les objets sont les foncteurs entre petites catégories et les morphismes sont les transformations naturelles entre de tels foncteurs.

4. (Le groupoïde fondamental d'un espace topologique) Soit X un espace topologique. Expliquer comment former une catégorie $\Pi_1 X$ où $\mathrm{Ob}\Pi_1 X$ est l'ensemble sous-jacent à l'espace topologique X, et $\Pi_1 X(x, x')$ est l'ensemble des classe d'homotopie de chemins de tous les chemins de x vers x', pour tous $x, x' \in X$. Montrer que tout morphisme de $\Pi_1 X$ est un isomorphisme et que toute application continue $f : X \to Y$ induit un foncteur $\Pi_1 f : \Pi_1 X \to \Pi_1 Y$. Que peut-on dire si f est une équivalence d'homotopie? Montrer que Π_1 est en fait un foncteur de Top vers Cat.

5. Soient $G : \mathsf{Set} \to \mathsf{Top}$ et $D : \mathsf{Set} \to \mathsf{Top}$ les foncteurs qui munissent un ensemble de sa topologie grossière et de sa topologie discrète, respectivement. Soit $U : \mathsf{Top} \to \mathsf{Set}$ le foncteur oubli. Montrer qu'il y a des transformations naturelles $DU \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathsf{Top}} \Rightarrow GU$.