Corrigé exercice 1 série 7

Raphaël Zacharias

5 novembre 2013

Exercice 1. *Prove that the fundamental group of any H-space (not necessarily homotopy associative!) is abelian.*

Démonstration. Soit (X, x_0, μ) un H-espace. Puisque $\mathbb{S}^1 \cong \Sigma\mathbb{S}^0$, le groupe fondamental de (X, x_0) est donné par

$$\pi_1(X, x_0) = [\mathbb{S}^1, X]_* = [\Sigma\mathbb{S}^0, X]_*.$$

On rappelle juste que dans le cas des sphères, on ne distingue pas la suspension de la suspension réduite. On remarque assez facilement que la multiplication sur $\pi_1(X, x_0)$, c'est-à-dire la concaténation des lacets est strictement la même que celle induite par la co-multiplication sur le co-H-groupe $\Sigma\mathbb{S}^0$, que nous notons ψ'. La multiplication μ sur le H-espace (X, x_0) permet de munir l'ensemble $[\Sigma\mathbb{S}^0, X]_*$ d'une "multiplication"

$$\begin{aligned} \mu' : [\Sigma\mathbb{S}^0, X]_* \times [\Sigma\mathbb{S}^0, X]_* &\longrightarrow [\Sigma\mathbb{S}^0, X]_* \\ ([f]_*, [g]_*) &\longmapsto [\mu \circ (f \times g) \circ \Delta]_*. \end{aligned}$$

De plus, μ' admet pour élément neutre à gauche et à droite $[\eta_X \circ \varepsilon_{\Sigma\mathbb{S}^0}]_*$ qui est aussi l'élément neutre de ψ'. Enfin, en se basant sur le résultat établi au cours, c'est-à-dire

$$\psi'\left(\mu'(a,b), \mu'(c,d)\right) = \mu'\left(\psi'(a,c), \psi'(b,d)\right) \forall a,b,c,d \in [\Sigma\mathbb{S}^0, X]_*,$$

on en conclut grâce au Lemme de Eckman-Hilton que $\mu' = \psi'$ et que ces deux multiplications commutent. C'est-à-dire, la multiplication de base (la concaténation des lacets) sur $\pi_1(X, x_0)$ est une opérations commutative.

$\square$